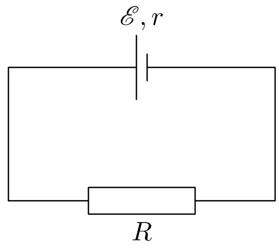
Максимизация мощности на резисторе

Как показывает опыт, не все школьники (даже порой весьма продвинутые) умеют решать следующую простую и стандартную задачу.

Задача. К источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r подключен резистор R. Начинаем изменять величину R от нуля до очень большой величины. Чему равна максимальная тепловая мощность, выделяющаяся на этом резисторе?



Для полноты картины мы продемострируем три способа ее решения: 1) мощность как функция тока; 2) в лоб через производную; 3) через неравенство Коши.

Способ 1 (*мощность как функция тока*). Напряжение на резисторе

$$U = \mathscr{E} - Ir,$$

где I — ток в цепи. Тогда мощность на резисторе

$$P = UI = \mathscr{E}I - I^2 r.$$

Величина P является квадратичной функцией тока; график этой функции — парабола, ветви которой направлены вниз. Максимальное значение достигается в вершине параболы, то есть при силе тока

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{2r}$$

(видим заодно, что максимум мощности достигается при $R = r$). Тогда максимальная мощность

$$P_{\max} = P(I_0) = \mathscr{E} \cdot \frac{\mathscr{E}}{2r} - \left(\frac{\mathscr{E}}{2r}\right)^2 r = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Ответ. $P_{\max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}$ при $R = r$.

Способ 2 (*через производную*). По закону Ома для полной цепи имеем:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}.$$

Тогда мощность на резисторе

$$P(R) = I^2 R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R + r)^2}.$$

Исследуем её как функцию R. Вычислим производную:

$$P'(R) = \mathscr{E}^2 \frac{(R+r)^2 - R\cdot 2(R+r)}{(R+r)^4} = \mathscr{E}^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Отсюда видно, что $R = r$ — точка максимума функции $P(R)$. Следовательно,

$$P_{\max} = P(r) = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Способ 3 (*через неравенство Коши*). Напомним, что неравенством Коши называется неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, которое в случае двух неотрицательных чисел a и b выглядит так:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Равенство достигается при $a = b$.

В физике нередко возникает ситуация, когда нужно минимизировать функцию вида

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

с положительными a, b, x. Неравенство Коши решает вопрос моментально:

$$f(x) \geqslant 2\sqrt{ax\cdot\frac{b}{x}} = 2\sqrt{ab}.$$

Следовательно, $f_{\min} = 2\sqrt{ab}$, и достигается это минимальное значение при $ax = \frac{b}{x}$, то есть при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Перейдем к нашей к задаче. Как мы видели выше,

$$P = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Преобразуем:

$$P = \frac{\mathscr{E}^2 R}{R^2 + 2Rr + r^2} = \frac{\mathscr{E}^2}{R + \frac{r^2}{R} + 2r}.$$

Видим в знаменателе ту самую функцию, для которой так удобно применять неравенство Коши:

$$R + \frac{r^2}{R} \geqslant 2\sqrt{R\cdot\frac{r^2}{R}} = 2r.$$

Отсюда

$$P \leqslant \frac{\mathscr{E}^2}{2r+2r} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$

Равенство достигается при $R = \frac{r^2}{R}$, то есть при $R = r$. Итак,

$$P_{\max} = \frac{\mathscr{E}^2}{4r}.$$