

## Олимпиада «Высшая проба» по математике

7 класс, 2023 год

1. Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, все цифры которого различны, такое, что при вычёркивании всех чётных цифр остаётся 97531, а при вычёркивании всех нечётных цифр — 02468.

2. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  отметили точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно так, что  $\angle AKM = 90^\circ$ ,  $\angle BLK = 90^\circ$  и  $KM = KL$ . Чему равен угол  $CML$ ?

3. На складе стоят несколько ящиков. Известно, что ящиков не более 60, и в каждом из них находятся либо 59 яблок, либо 60 апельсинов. После того, как на склад принесли коробку с некоторым количеством апельсинов, фруктов на складе стало поровну. Какое наименьшее количество апельсинов могло быть в принесённой коробке?

4. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 100 жителей этого острова выстроились в ряд, и каждый из них сказал одну из следующих фраз:

- «Слева от меня лжецов столько же, сколько и рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 1 больше, чем рыцарей.»
- «Слева от меня лжецов на 2 больше, чем рыцарей.»
- ...
- «Слева от меня лжецов на 99 больше, чем рыцарей.»

Известно, что каждую фразу сказал ровно один человек. Какое наименьшее количество лжецов может быть среди этих 100 жителей?

5. Андрей выписал на доску 6 последовательных четырёхзначных чисел в строчку в порядке возрастания. Затем он под каждым из этих чисел написал один из его простых делителей, причём все выписанные простые делители оказались разными. После этого Андрей стёр исходные 6 чисел и пригласил в класс Бориса. Всегда ли Борис, видя выписанные на доску простые делители, сможет однозначно определить исходные числа?

6. На столе по кругу лежат  $n$  монет, пронумерованных числами от 0 до  $n - 1$  в некотором порядке. За одну операцию разрешается взять какую-то монету с номером  $k$  и переместить её на  $k$  позиций в произвольном направлении, сместив при этом промежуточные монеты (например, операция над монетой с номером 2 может быть выполнена одним из двух способов, показанных на рисунке ниже). Докажите, что из любого начального положения можно получить такое, в котором, начиная с некоторого места, монеты 0, 1, 2,  $\dots$ ,  $n - 1$  лежат по часовой стрелке.

