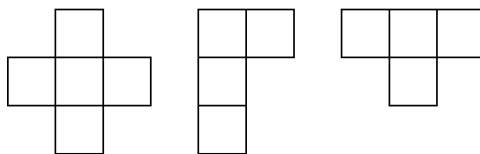


Олимпиада «Высшая проба» по математике

7 класс, 2022 год

1. Гражданин Сидоров на 6 лет старше своей жены гражданки Сидоровой. Однажды Сидоров обнаружил, что ровно половину своей жизни он провёл в браке с Сидоровой. Ровно через 14 лет после этого Сидорова обнаружила, что она провела в браке с Сидоровым ровно две третьих своей жизни. Сколько лет будет гражданину и гражданке Сидоровой, когда они отпразднуют золотую свадьбу — пятидесятилетие своей супружеской жизни?
2. Петя записал в ряд 2021 число, отличное от нуля, и перемножил все пары соседних чисел. Среди полученных произведений оказалось 1010 положительных и 1010 отрицательных чисел. Вася записал все исходные числа в том же порядке, но по кругу, и тоже перемножил все пары соседних чисел. Сколько среди этих чисел будет положительных и сколько отрицательных? Ответ необходимо обосновать.
3. Можно ли разрезать прямоугольник 6×7 на кресты из пяти клеток, фигурки Г-тетрамино и фигурки Т-тетрамино? Если можно, то сколько пятиклеточных крестов может быть в таком разрезании?



4. Пара различных натуральных чисел (a, b) называется удачной, если сумма наибольшего собственного делителя числа a и наименьшего собственного делителя числа b равна сумме наименьшего собственного делителя числа a и наибольшего собственного делителя числа b . Существует ли миллион удачных пар? Собственный делитель натурального числа — любой делитель, отличный от 1 и самого числа.
5. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B . На стороне AC выбрана точка K такая, что $\angle CBK = 15^\circ$. На луче BK отмечена точка M такая, что $\angle ACM = 90^\circ$. Докажите, что $AC = BM$.
6. Имеется 999 палочек длин $1, 2, 3, \dots, 999$. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся лежащие подряд три палочки, из которых можно сложить треугольник?