

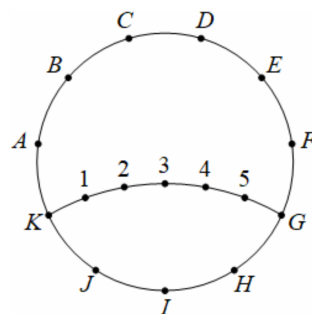
# Московская устная математическая олимпиада

6 класс, 2023 год

## Первый тур

**1. Семь дробей.** Найдутся ли семь различных правильных несократимых дробей со знаменателями от 2 до 6 и с суммой 4?

**2. Метро.** Метро состоит из кольцевой линии и хорды (см. рис.). Между каждыми двумя соседними станциями ехать по времени одинаково, на пересадку между кольцевой линией и хордой время не тратится. Вася живёт на одной из шести станций над хордой, а школа расположена на одной из пяти станций внутри хорды. От Васиного дома до школы есть два различных кратчайших маршрута, причём хотя бы в одном из них нужно ехать по кольцевой линии по часовой стрелке. На каких станциях расположены Васин дом и школа?



**3. Шахматный турнир.** В турнире участвовали десять шахматистов. Каждый сыграл с каждым два раза: один раз белыми и один раз чёрными, причём какую-то из этих партий он выиграл, а другую проиграл (ничьих не было). Могло ли оказаться так, что половину всех партий выиграла белые, а половину — чёрные?

## Второй тур

**4. Первые цифры.** Серёжа выписал все натуральные числа от 1 до  $N$  и заметил, что ровно 40% из них начинаются с единицы. Докажите, что и  $N$  начинается с единицы.

**5. Равные куски.** Некоторые клетки доски размером  $7 \times 7$  покрашены в чёрный цвет, образуя чёрный многоугольник. Его разрезали по прямой, идущей по линии сетки. Мог ли он распасться на пять равных фигур?

**6. Тёзки.** Ученики писали олимпиаду в двух залах. Ни в одном из залов не было трёх тёзок. У 100 учеников были два тёзки в другом зале. У 144 учеников было хотя бы по одному тёзке в каждом зале. У скольких учеников было ровно по одному тёзке в каждом зале? (Напомним, что тёзками считаются люди с одинаковыми именами.)

## Третий тур

**7. Игра с числами.** Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя выписывает на доску  $N \geq 3$  чисел. Васе разрешается выбрать несколько чисел на доске и заменить каждое из них на среднее арифметическое выбранных чисел. При каких  $N$  Вася за несколько ходов сможет сделать все числа равными, независимо от того, какие числа выпишет Петя?

**8. Перекрёстки.** В городе Нью-Васюки 2023 прямолинейные улицы. Известно, что каждые две улицы пересекаются, но никакие три улицы не пересекаются в одной точке. Докажите, что мэр Нью-Васюков может назначить на каждом перекрёстке приоритет улиц (одну назвать главной, а другую — второстепенной) так, чтобы при движении вдоль любой улицы от начала до конца приоритеты этой улицы на перекрёстках чередовались.

**9. Верёвки на деревьях.** Вдоль дороги стоят 100 деревьев через каждый метр. Некоторые пары деревьев связаны верёвками, каждые два дерева связаны не более чем одной верёвкой. Оказалось, что нет верёвки, которая находится строго между концами какой-то другой верёвки. Какое наибольшее количество верёвок может быть?