

Московская математическая олимпиада

10 класс, 2023 год

1. Про четыре целых числа a, b, c, d известно, что

$$a + b + c + d = ab + bc + cd + da + 1.$$

Докажите, что модули каких-то двух из этих чисел отличаются на один.

2. В эстафетном забеге Москва — Петушки участвовали две команды по 20 человек. Каждая из команд по-своему разделила дистанцию на 20 не обязательно равных отрезков и распределила их между участниками так, чтобы каждый бежал ровно один отрезок (скорость каждого участника постоянна, но скорости разных участников могут быть различны). Первые участники обеих команд стартовали одновременно, а передача эстафеты происходит мгновенно. Какое максимальное количество обгонов могло быть в таком забеге? Опережение на границе этапов обгоном не считается.

3. Периметр треугольника ABC равен 1. Окружность ω касается стороны BC , продолжения стороны AB в точке P и продолжения стороны AC в точке Q . Прямая, проходящая через середины AB и AC , пересекает описанную окружность треугольника APQ в точках X и Y . Найдите длину отрезка XY .

4. На экране суперкомпьютера напечатано число $11 \dots 1$ (900 единиц). Каждую секунду суперкомпьютер заменяет его по следующему правилу. Число записывается в виде AB , где B состоит из двух его последних цифр, и заменяется на $2 \cdot A + 8 \cdot B$ (если B начинается на нуль, то он при вычислении опускается). Например, 305 заменяется на $2 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 46$. Если на экране остаётся число, меньшее 100, то процесс останавливается. Правда ли, что он остановится?

5. На плоскости даны две окружности ω_1 и ω_2 , касающиеся внешним образом. На окружности ω_1 выбран диаметр AB , а на окружности ω_2 выбран диаметр CD . Рассмотрим всевозможные положения точек A, B, C и D , при которых $ABCD$ — выпуклый описанный четырёхугольник, и пусть I — центр его вписанной окружности. Найдите геометрическое место точек I .

6. На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется по некоторому правилу, причем новый цвет зависит только от цвета укушившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов смогут договориться так, чтобы стать синими?

Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зеленого, укушенный меняет цвет на синий; если зеленый кусает красного, укушенный остается красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный хамелеон кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и так далее. (Конкретные правила смены цветов могут быть устроены иначе.)