

# Московская математическая олимпиада

11 класс, 2022 год

## Первый день

1. В коллекции Алика есть два типа предметов: значки и браслеты. Значков больше, чем браслетов. Алик заметил, что если он увеличит количество браслетов в некоторое (не обязательно целое) число раз, не изменив количества значков, то в его коллекции будет 100 предметов. А если, наоборот, он увеличит в это же число раз первоначальное количество значков, оставив прежним количество браслетов, то у него будет 101 предмет. Сколько значков и сколько браслетов могло быть в коллекции Алика?
2. В декартовой системе координат (с одинаковым масштабом по осям  $x$  и  $y$ ) нарисовали график показательной функции  $y = 3^x$ . Затем ось  $y$  и все отметки на оси  $x$  стёрли. Остались лишь график функции и ось  $x$  без масштаба и отметки 0. Каким образом с помощью циркуля и линейки можно восстановить ось  $y$ ?
3. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AL$ . На продолжении отрезка  $LA$  за точку  $A$  выбрана точка  $K$  так, что  $AK = AL$ . Описанные окружности треугольников  $BLK$  и  $CLK$  пересекают отрезки  $AC$  и  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что прямые  $PQ$  и  $BC$  параллельны.
4. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии  $a$  от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной не более  $14a$ ?
5. Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале  $(0; 1)$ ?
6. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

## Второй день

1. Некоторые неотрицательные числа  $a, b, c$  удовлетворяют равенству  $a + b + c = 2\sqrt{abc}$ . Докажите, что  $bc \geq b + c$ .
2. Волейбольный чемпионат с участием 16 команд проходил в один круг (каждая команда играла с каждой ровно один раз, ничьих в волейболе не бывает). Оказалось, что какие-то две команды одержали одинаковое число побед. Докажите, что найдутся три команды, которые выиграли друг у друга по кругу (то есть  $A$  выиграла у  $B$ ,  $B$  выиграла у  $C$ , а  $C$  выиграла у  $A$ ).
3. В выпуклом 12-угольнике все углы равны. Известно, что длины каких-то десяти его сторон равны 1, а длина ещё одной равна 2. Чему может быть равна площадь этого 12-угольника?
4. В равнобедренной трапеции проведена диагональ. По контуру каждого из получившихся двух треугольников ползёт свой жук. Скорости движения жуков постоянны и одинаковы. Жуки не меняют направления обхода своих контуров, и по диагонали трапеции они ползут в разных направлениях. Докажите, что при любых начальных положениях жуков они когда-нибудь встретятся.
5. Таня последовательно выписывала числа вида  $n^7 - 1$  для натуральных чисел  $n = 2, 3, \dots$  и заметила, что полученное при  $n = 8$  число делится на 337. А при каком наименьшем  $n > 1$  она получит число, делящееся на 2022?