

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2023 год, вариант 1

1. Докажите, что многочлен $P(t) = t^3 - 2t^2 - 10t - 3$ имеет три различных действительных корня. Найдите многочлен $R(t)$ третьей степени с корнями $u = x^2y^2z$, $v = x^2z^2y$, $w = y^2z^2x$, где x, y, z — различные корни многочлена $P(t)$.

2. Имеется одна подключенная к сети электрическая розетка, два удлинителя на три розетки каждый и одна настольная лампа в комплекте. Незнайка случайным образом воткнул все три вилки в 3 из 7 розеток. С какой вероятностью загорится лампа?

3. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 внешних углов треугольника ABC пересекают продолжения противоположных сторон треугольника в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите угол $A_1C_1B_1$ и длину отрезка A_1B_1 , если $AC = 5, BC = 2$, а угол ACB равен $\arccos \frac{13}{20}$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = |a - 3|x + 1| + x + 3| + 3|x + 1|, \\ 2^{2-y} \log_{\sqrt{3}} ((x + |a + 2x|)^2 - 6(x + 1 + |a + 2x|) + 16) + 2^{x+|a+2x|} \log_{1/3} (y^2 + 1) = 0, \\ x + |a + 2x| \leq 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x; y)$, где x и y — целые числа. Укажите это решение при каждом из найденных a .

5. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью, проходящей через вершину F основания $ABCDEF$ и параллельной медиане CM боковой грани SCD и апофеме SN боковой грани SAF , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{7}$, а расстояние от вершины S до секущей плоскости равно $\sqrt{7}$.

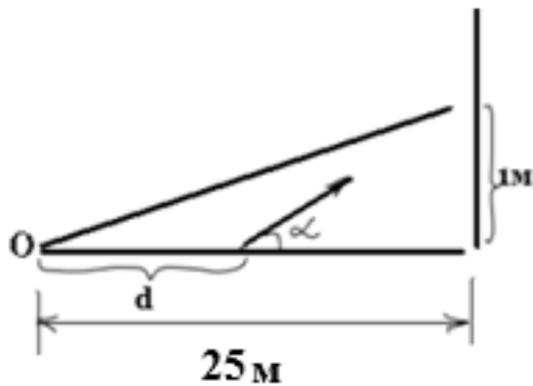
6. Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть линия ворот находится на расстоянии 25 м от центральной точки O хоккейной площадки. Автомат установлен на расстоянии $d = 16$ м от точки O по направлению к воротам, скорость выброса шайбы равна $V_0 = 20$ м/с. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот. При этом для обеспечения безопасности траектория вылетающих шайб должна, с одной стороны, находиться не выше прямой линии, соединяющей центр ледовой площадки O с точкой, находящейся в плоскости полета шайб, в плоскости ворот, и на расстоянии одного метра от поверхности льда, а с другой стороны — должна пересекать плоскость ворот по нисходящей ветви траектории.

Определите максимально возможное значение тангенса угла, под которым могут вылетать шайбы из шайбомета, если траектория движения шайбы, рассматриваемой как материальная точка, в плоскости ее полета в системе координат с центром в O и осью абсцисс, направленной

вдоль поверхности льда, описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = d + V_0 t \cos \alpha, \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$



Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.