

# Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 10 класс, 2023 год, вариант 1

1. В кружке «Неумелые руки» методом тяп-ляп изготовили несбалансированные рычажные весы с плечами разной длины и чашами с разным собственным весом. В результате четырех взвешиваний на этих весах были получены следующие «равновесия»:

$$\begin{array}{ll} \text{[слева 3 кг = справа дыня];} & \text{[слева дыня = справа 5,5 кг];} \\ \text{[слева 5 кг = справа арбуз];} & \text{[слева арбуз = справа 10 кг].} \end{array}$$

Каков истинный вес (масса) дыни и арбуза?

2. Какое максимальное возможное количество идущих подряд членов возрастающей геометрической прогрессии могут быть 3-значными натуральными числами? Приведите пример такой последовательности.

3. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $L$  — точка пересечения отрезков  $B_1C_1$  и  $AA_1$ ,  $K$  — точка пересечения отрезков  $B_1A_1$  и  $CC_1$ . Найдите отношение  $LM : MK$ , если  $M$  — точка пересечения биссектрисы  $BB_1$  с отрезком  $LK$ , и  $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$ .

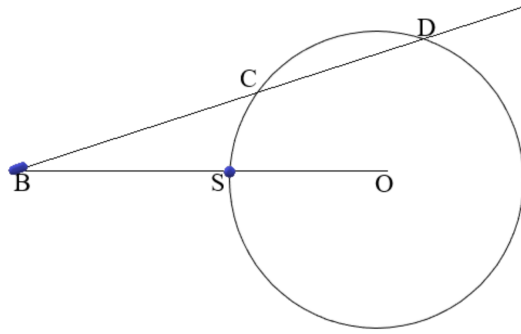
4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$|a - 3|x + 0,5| + x + 2,5| + |a - x^2| = x^2 + x - 3|x + 0,5| + 2,5$$

имеет ровно два целых решения.

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  образовано плоскостью, проходящей через центр основания  $ABCDEF$  и параллельной медиане  $CM$  боковой грани  $SCD$  и апофеме  $SN$  боковой грани  $SAF$ , сторона основания пирамиды равна 8, а расстояние от вершины  $S$  до секущей плоскости равно  $3\sqrt{13/7}$ . Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

6. Для получения фотоснимков небесных тел используются космические зонды — автономные роботы, оснащенные ракетными двигателями, собственными энергетическими установками, системами радиосвязи и навигации, научными приборами. И все это управляется бортовыми компьютерами. Например, благодаря таким зондам успешно выполнена программа исследования Сатурна и его крупнейшего спутника Титана, удивительно похожего на Землю. При изучении одного из спутников Сатурна с радиусом орбиты  $R \approx 1,2 \cdot 10^5$  км возникла нештатная ситуация: при пролете зонда сквозь плоскость колец Сатурна бортовая поворотная платформа с телекамерами была заклинена частицами этих колец. В результате смогли получить четкие снимки только одной стороны спутника. Для получения снимков обратной стороны спутника было принято решение продолжить полет зонда и встретить спутник в другой точке пространства, для чего пришлось скорректировать скорость движения зонда.



Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Траекторию движения спутника (орбиту) вокруг Сатурна (точка  $O$ ) считаем круговой с радиусом  $R = 1,2 \cdot 10^5$  км, скорость движения спутника постоянна и равна  $V_T = 3,27$  км/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна  $V_1 = 6$  км/с, а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках  $C$  и  $D$ . Согласно заложенной программе, съемка поверхности спутника зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой спутника (точки  $C$  и  $D$ ). Когда спутник (точка  $S$ ) оказывается строго на прямой между центром Сатурна (точка  $O$ ) и подзондовой точкой (точка  $B$ ), запускается таймер ( $t_0 = 0$ ). При этом спутник и подзондовая точка встречаются в точке  $C$  через время  $t = 2 \cdot 10^4$  с. После съемки над точкой  $C$  скорость зонда меняется так, чтобы над точкой  $D$  оказаться одновременно со спутником для фотографирования его обратной стороны. Скорость подзондовой точки на участке  $CD$  постоянна.

Определите расстояние между подзондовой точкой и спутником (считая его материальной точкой) в начальный момент времени  $t_0$ , а также скорость подзондовой точки  $V_2$  на участке  $CD$ . В расчетах используйте приближенные значения скорости спутника и числа  $\pi$  — округлите их до целых значений.