

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

9 класс, 2022 год, вариант 1

1. Решите неравенство:

$$3\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt[6]{\sqrt{x^3-x} + \sqrt[4]{x-x^2} - x^3 + 3x - 2} \leq 9 - 6x.$$

2. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N . Найдите длину отрезка CN , если длины катетов равны 1 и 4.

3. Школьник Иванов проплывает на плоту путь между городами A и B за 15 часов. На моторной лодке вместе с папой он проплывает весь путь от A до B и обратно не менее чем за 8 часов. Точно такое же путешествие, но вместе с дедушкой (от A до B и обратно) занимает по времени не более 20 часов, при этом собственная скорость лодки при управлении дедушкой на 50% меньше, чем у папы. Сколько часов школьник вместе с дедушкой плывут на моторной лодке от города A до города B ?

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left| \frac{x^2 - 2ax + a^2 + 1}{x - a} \right| + x^2 - 6x + 7 = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке M , а стороны AC — в точке K . На стороне AB выбирается точка N так, что отрезок MK делит отрезок CN пополам. Найдите длину отрезка AN , если $AB = 8$, $AC = 7$, $BC = 6$.

6. Первый рабочий красит стандартный номер в гостинице за 1 день, а выкладывает плиткой ванную комнату за 5 дней. Второй рабочий красит стандартный номер в гостинице за 2 дня, а выкладывает плиткой ванную комнату за 8 дней. За какое минимальное количество дней они отремонтируют 30 стандартных номеров и 20 ванных комнат, если они начинают и заканчивают работать вдвоем одновременно.