

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 10 класс, 2022 год, вариант 2

1. Дробь  $1/5$  записана в виде бесконечной двоичной дроби. Сколько единиц среди первых 2022 цифр после запятой содержится в такой форме записи?

2. Имеется куб, зафиксированный на ножках, и шесть различных красок. Сколькими способами можно покрасить все грани куба (каждую в один цвет, все краски использовать не обязательно) так, чтобы соседние грани (имеющие общее ребро) были разного цвета?

3. Точка  $M$  принадлежит катету  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$ , причем  $AM = 2$ ,  $MC = 16$ . Отрезок  $MH$  — высота треугольника  $AMB$ . Точка  $D$  расположена на прямой  $MH$  так, что угол  $ADB$  равен  $90^\circ$ , и точки  $C$  и  $D$  лежат по одну сторону от прямой  $AB$ . Найдите длину отрезка  $BL$ , если  $L$  — точка пересечения  $BD$  и  $AC$ , а тангенс угла  $ACH$  равен  $1/18$ .

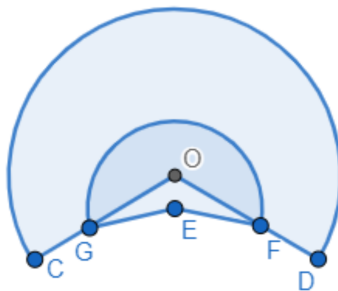
4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} (a|y^3| + a|x^3| - 8)(x^6 + y^6 - 3a^2) = 0, \\ \sqrt{x^6 y^6} = a \end{cases}$$

имеет восемь различных решений

5. Внутри правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  расположена правильная четырехугольная призма  $KLMNK_1L_1M_1N_1$ , основание  $KLMN$  которой лежит в плоскости  $ABC$ . Центр основания  $KLMN$  призмы расположен на отрезке  $AC$ ,  $KL \parallel AC$ ,  $KN \parallel BD$  (точки  $K$  и  $B$  лежат по одну сторону от  $AC$ ), сторона основания призмы равна 2, боковое ребро  $KK_1$  призмы равно 3. Вершины  $L_1$  и  $M_1$  верхнего основания призмы  $KLMNK_1L_1M_1N_1$  принадлежат боковым граням  $SBC$  и  $SCD$  пирамиды  $SABCD$  соответственно. Плоскость  $\gamma$  проходит через прямую  $BD$  и точку  $L_1$ . Найдите площадь сечения пирамиды  $SABCD$  плоскостью  $\gamma$ , если сторона пирамиды равна  $8\sqrt{2}$ , а её высота равна 12.

6. Для улучшения жилищных условий горожан в некоторых городах реализуется программа реновации — замена не подлежащего сохранению жилищного фонда путем его сноса и капитального строительства на высвобождаемой территории. Как правило, разбор старых домов и расчистка площадки под новое строительство происходит на ограниченной территории. Поэтому нужна техника (вращающиеся экскаваторы), которая могла бы расчистить наибольшую площадь с наименьшим количеством перемещений.



На рисунке изображена схема рабочей зоны и схема перемещений экскаватора. Встав в начальную точку  $E$ , экскаватор первым делом очищает ближнюю к себе площадку (на ней в основном находится металлический лом). Эта площадка представляет из себя сектор окружности, ограниченный большой дугой  $FG$  окружности с центром в точке  $E$  и радиусом  $2\sqrt{2}$  м, а также отрезками ее радиусов  $EF$  и  $EG$ . Затем экскаватор перемещается в точку  $O$  и очищает дальнюю от себя площадку (на ней в основном находится кирпичный лом). Эта площадка с внешней стороны ограничена большой дугой  $CD$  окружности с центром в точке  $O$  и радиусом 6 м, отрезками  $CG$  и  $FD$  (точки  $F$  и  $G$  находятся на соответствующих радиусах  $OC$  и  $OD$ ), а с внутренней стороны — большой дугой  $FG$  первой окружности с центром в точке  $E$ .

Определите площадь под кирпичным ломом (без металлических остатков), если точка  $O$  находится в 2 метрах от точки  $E$  по направлению к центру металлического завала, угол  $EOD$  равен  $45^\circ$ .