

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

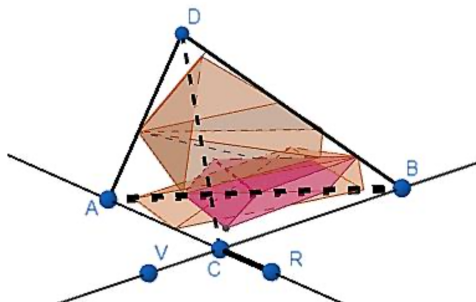
10 класс, 2022 год, вариант 1

1. Числа u, v, w являются корнями уравнения $x^3 - 3x - 1 = 0$. Найдите $u^9 + v^9 + w^9$.
2. В лаборатории имеются колбы двух размеров (объемом V и объемом $V/3$) в суммарном количестве 100 штук, причем колб каждого размера не менее 2. Лаборант поочередно случайно выбирает две колбы, и первую из них полностью заполняет 70-процентным раствором соли, а вторую полностью заполняет 40-процентным раствором соли. Затем он сливает содержимое этих двух колб в одну чашу и определяет процентное содержание соли в ней. При каком наименьшем количестве больших колб N событие «процентное содержание соли в чаше находится в пределах от 50% до 60% включительно» будет случаться реже события «при случайном бросании двух симметричных монет выпадает орел и решка (в любом порядке)»? Ответ обосновать.
3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины сторон AB и BC равны, DB — биссектриса угла ADC , $AD : DC = 4 : 3$. Найдите косинус угла AKB , если K — точка пересечения диагоналей AC и BD , и $BK : KD = 1 : 3$.
4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (ay - ax + 2)(4y - 3|x - a| - x + 5a) = 0, \\ \sqrt{x^2 y^2} = 4a \end{cases}$$

имеет шесть различных решений.

5. В тетраэдре $ABCD$ суммы трёх плоских углов при каждой вершине равны 180° . Найдите объём тетраэдра, если $BC = 4$, $\cos \angle BAC = 3/4$, $\sin \angle CBD = 5\sqrt{7}/16$.
6. По программе реновации было решено разобрать старый дом и на его месте построить новый. При разборе старого дома возникло две проблемы. 1) Скопление строительного лома перекрыло подход к некоторым точкам строительной площадки, между которыми необходимо было промерить расстояние. Прораб промерил расстояние от точки C до точки A и от точки C до точки B (см. рис.). Оказалось, что $AC = 4$ м, $BC = 10$ м. Кроме того, ему удалось определить расстояния $CR = 1$ м, $VR = 3$ м, $CV = 2,5$ м для точек R и V , расположенных на продолжениях прямых дорожек, соединяющих объекты A, C и C, B соответственно.



Определите расстояние между точками A и B (промерить это расстояние на площадке не представлялось возможным из-за завала) и площадь части строительной площадки $CADB$ при условии, что расстояния CD и BD вдвое больше расстояния CB .

2) Из земли торчал негнувшийся кусок арматуры — штырь, высота которого над землей 0,5 м. Попытки выдернуть его из земли не привели к успеху. Тогда рабочие сдвинули его бульдозером так, что конец штыря сравнялся с поверхностью земли и оказался на расстоянии 1,5 м от первоначальной точки входа штыря в землю. Найдите длину части штыря, скрытую в земле, предполагая, что его нижний конец не сместился.