

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2021 год, вариант 2

1. Функция $f(x)$ при всех действительных $x \neq 1$ удовлетворяет соотношению

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 4f(x) + 14x = 0.$$

Решите уравнение $4 \cdot 8^x = 7 + 2^{f(x)}$.

2. Найдите наибольшее натуральное число n , для которого верно неравенство

$$(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 106(1 + 2 + \dots + n) + 105 \leq 0.$$

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $AK = 9\sqrt{2}/2$, $BK = 9$, $KC = 3$. Около треугольника ABK описана окружность. Через точку C и точку D , лежащую на стороне AB , проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P , причем $CP > CD$. Найдите DP , если $\angle APB = \angle BAC$, CD — биссектриса треугольника ABC .

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 7a - 30 \cos t + 3 \leq 0, \\ 5 \sin t + a + \frac{1}{2} + \frac{|\cos t|}{2 \cos t} + \frac{|5 \cos t - 4|}{5 \cos t - 4} = 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a .

5. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 2$ и $BC = 6$. Высотой пирамиды $SABC$ является отрезок SD , где точка D симметрична точке B относительно середины отрезка AC . Точка M принадлежит боковому ребру SB , причем $SM = 2MB$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через D параллельно гипотенузе основания AC и отрезку AM , если расстояние от точки B до секущей плоскости равно $\sqrt{14}$.

6. Искусственный спутник (ИСЗ) движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте H , равной радиусу Земли $R = 6372$ км, с периодом обращения $T = 4$ ч и постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Для того, чтобы можно было наблюдать за спутником с поверхности Земли, он должен находиться выше плоскости горизонта. Определите: а) продолжительность наблюдения за спутником (в минутах) от момента его появления над горизонтом до момента захода за горизонт, если траектория ИСЗ проходит ровно над головой наблюдателя; б) плоский угол при вершине конуса обзора поверхности Земли с ИСЗ (в градусах).