

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2021 год, вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 2 = 2\sqrt{y^3z^5}, \\ 1 - y = 2xz\sqrt{1 - 4y^3z^5} + \sqrt{7 - y}. \end{cases}$$

2. Число p таково, что неравенство $\frac{4a}{3b+4c} + \frac{6b}{4c+2a} + \frac{8c}{2a+3b} \geq p$ выполняется для всех положительных чисел a, b, c . Найдите наибольшее значение p .

3. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K так, что $BK = 5, KC = 4$. Около треугольника ABK описана окружность с центром в точке O , причем площадь треугольника AOC равна $2\sqrt{15}$. Через точку C и середину D стороны AB проведена прямая, которая пересекает окружность в точке P , причем $CP > CD$. Найдите CD , если $\angle APB = \angle BAC$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \left(\frac{|x-1|}{x-1} + 3a \right)^2 = 24 - 4x^2 - 4x, \\ 16x^2 - 27a^2 + 6ax + 22x + 12a + 7 \leq 0 \end{cases}$$

имеет решения. Укажите эти решения при найденных значениях параметра a .

5. Боковые ребра TA, TB , и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, TH — высота тетраэдра, $\angle TАН = 30^\circ, \angle ТВН = 45^\circ, BC = \sqrt{6}$. Точка K , лежащая в плоскости основания ABC , равноудалена от боковых граней тетраэдра $TABC$. Найдите HK .

6. Спутник связи движется по круговой орбите вокруг Земли (имеет форму шара) на высоте H , равной радиусу Земли $R = 6372$ км, с периодом обращения $T = 4$ ч и постоянной угловой скоростью $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для того, чтобы в центре управления полетами (ЦУП) можно было получать сигнал от спутника (иметь окно для связи), он должен находиться выше плоскости горизонта ЦУПа. Определите количество окон для связи ЦУПа со спутником в течение суток и общую продолжительность этих окон, если траектория полета спутника проходит ровно над ЦУПом.