

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2021 год, вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - 3x = 4x^3y, \\ y^2 + 4x^2y^3 = 4x. \end{cases}$$

2. Число b таково, что неравенство $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_5}{a_6} + \frac{a_7}{a_8} \geq b$ выполняется для всех натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$, удовлетворяющих неравенствам $a_n \leq a_{n+1}$, $n = 1, \dots, 8$, $a_8 \leq 81$. Найдите наибольшее значение b .

3. Дан треугольник ABC с углом B , равным 60° . На продолжениях сторон AB, CB за точку B взяты точки K, L соответственно так, что $BK : AB = 2 : 1$, $BL : CB = 3 : 1$. На продолжении медианы BM за точку M взята точка N , причем $BN : BM = 6 : 1$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если площадь треугольника KLN равна $126\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до точки касания вписанной в треугольник ABC окружности со стороной AC равно 1.

4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{6-a}{(x-1)^2} - \frac{5a}{x-1} + a^2 \leq 0$$

не выполняется ни для одного x из интервала $(1; 2)$. Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра a .

5. Боковые ребра TA, TB , и TC тетраэдра $TABC$ попарно перпендикулярны, ребро TA наклонено к плоскости основания ABC под углом 30° . Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , косинус угла AHB равен $-1/3$. Найдите угол между ребром TC и плоскостью ABC .

6. Для производственного процесса необходимо изготовить лекало из металлической пластины-заготовки, которая имеет форму прямоугольной трапеции. В заготовке имеется технологическое отверстие, которое можно принять за точку, расположенную в 2 см от меньшей боковой стороны, имеющей длину 4,5 см, и в 0,5 см от большего основания трапеции. Длины оснований трапеции равны 1,5 см и 6 см. Требуется провести на пластине кривую линию разреза так, чтобы расстояние от любой точки этой линии до большего основания трапеции было бы равно расстоянию от этой точки до технологического отверстия. Определите, в каком отношении линия разреза делит каждую из боковых сторон пластины.