

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2021 год, вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - 3x = 4x^3y, \\ y^2 + 4x^2y^3 = 4x. \end{cases}$$

2. Число  $b$  таково, что неравенство  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_5}{a_6} + \frac{a_7}{a_8} \geq b$  выполняется для всех натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ , удовлетворяющих неравенствам  $a_n \leq a_{n+1}$ ,  $n = 1, \dots, 8$ ,  $a_8 \leq 81$ . Найдите наибольшее значение  $b$ .

3. Дан треугольник  $ABC$  с углом  $B$ , равным  $60^\circ$ . На продолжениях сторон  $AB, CB$  за точку  $B$  взяты точки  $K, L$  соответственно так, что  $BK : AB = 2 : 1$ ,  $BL : CB = 3 : 1$ . На продолжении медианы  $BM$  за точку  $M$  взята точка  $N$ , причем  $BN : BM = 6 : 1$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если площадь треугольника  $KLN$  равна  $126\sqrt{3}$ , а расстояние от точки  $M$  до точки касания вписанной в треугольник  $ABC$  окружности со стороной  $AC$  равно 1.

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$\frac{3}{(x-1)^3} + \frac{6-a}{(x-1)^2} - \frac{5a}{x-1} + a^2 \leq 0$$

не выполняется ни для одного  $x$  из интервала  $(1; 2)$ . Укажите решения неравенства при найденных значениях параметра  $a$ .

5. Боковые ребра  $TA, TB$ , и  $TC$  тетраэдра  $TABC$  попарно перпендикулярны, ребро  $TA$  наклонено к плоскости основания  $ABC$  под углом  $30^\circ$ . Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ , косинус угла  $AHB$  равен  $-1/3$ . Найдите угол между ребром  $TC$  и плоскостью  $ABC$ .

6. Для производственного процесса необходимо изготовить лекало из металлической пластины-заготовки, которая имеет форму прямоугольной трапеции. В заготовке имеется технологическое отверстие, которое можно принять за точку, расположенную в 2 см от меньшей боковой стороны, имеющей длину 4,5 см, и в 0,5 см от большего основания трапеции. Длины оснований трапеции равны 1,5 см и 6 см. Требуется провести на пластине кривую линию разреза так, чтобы расстояние от любой точки этой линии до большего основания трапеции было бы равно расстоянию от этой точки до технологического отверстия. Определите, в каком отношении линия разреза делит каждую из боковых сторон пластины.