

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 11 класс, 2020 год, вариант 1

1. Четыре лифта небоскреба, отличающиеся цветовой гаммой (красный, синий, зеленый и желтый) движутся в разных направлениях и с разной, но постоянной скоростью. Наблюдая за лифтами, некто включил секундомер, и, глядя на его показания, стал записывать: 36-я секунда — красный лифт догнал синий (двигаясь с ним в одном направлении). 42-я секунда — красный лифт разминулся с зеленым (двигаясь в разных направлениях), 48-я секунда — красный лифт разминулся с желтым, 51-я секунда — желтый лифт разминулся с синим, 54-я секунда — желтый лифт догнал зеленый лифт. На какой секунде от начала отсчета зеленый лифт разминется с синим, если за период наблюдения лифты не останавливались и не меняли направления движения?
2. Найдите наименьшее значение выражения  $\frac{3f(1)+6f(0)-f(-1)}{f(0)-f(-2)}$ , если  $f(x) = ax^2 + bx + c$  — произвольная квадратичная функция, удовлетворяющая условию  $b > 2a$  и принимающая неотрицательные значения при всех действительных  $x$ .
3. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых число  $2^{10} + 2^{13} + 2^{14} + 3 \cdot 2^n$  является квадратом натурального числа.
4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Известно, что центры вписанной в треугольник  $ABD$  и описанной около треугольника  $ABC$  совпадают. Найдите  $CD$ , если  $AC = \sqrt{5} + 1$ . Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.
5. Найдите все значения параметра  $b$ , при котором для любого значения параметра  $a \in [-2; 1]$  неравенство  $a^2 + b^2 - \sin^2 2x - 2(a+b) \cos 2x - 2 > 0$  не выполняется хотя бы для одного значения  $x$ .
6. Основанием пирамиды  $TABCD$  является ромб  $ABCD$ . Высота пирамиды  $TK$  равна 1, точка  $K$  лежит на прямой, содержащей диагональ основания  $AC$ , причем  $KC = KA + AC$ . Боковое ребро  $TC$  равно  $2\sqrt{2}$ , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите длину стороны основания и угол между боковым ребром  $TA$  и плоскостью боковой грани  $TCD$ .