

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2020 год, вариант 1

1. Автобус с 6 часов утра с постоянной скоростью курсирует между пунктами A и B , причем, доехав до пункта A или B он сразу же поворачивает обратно. Петя на мопеде и Вася на велосипеде одновременно вместе с автобусом в 6 часов утра отправились из пункта A в пункт B , двигаясь при этом с постоянными скоростями. Известно, что автобус во время второго передвижения из пункта A в пункт B в 13 часов 30 минут поравнялся с Васей, и прибыл в пункт B в 15 часов одновременно с Петей. Определите отношение скоростей движения Васи и Пети. Укажите, в котором часу автобус на пути своего первого следования из пункта B в пункт A поравнялся с Васей.

2. Найдите все целочисленные решения неравенства

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2 + z^2 - 38(xy + z) - 40(yz + x) + 4xyz + 761 \leq 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{4x^4 + 1}{4\sqrt{2}} \leq x\sqrt{x^4 - \frac{1}{4}}.$$

4. Докажите, что при любых натуральных значениях n число $5^n(2^{2n} - 3^n) + 2^n - 7^n$ делится нацело на 65.

5. Найдите все значения параметра b , при котором для любого значения параметра $a \in [-1; 1]$ неравенство $x^2 + 6x + 2(a + b + 1)\sqrt{-x^2 - 6x - 5} + 8 < a^2 + b^2 + 2a$ не выполняется хотя бы для одного $x \in [-5; -1]$.

6. Первая окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC . Точки A и B лежат на второй окружности с центром в той же точке O . Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D ($D \neq A$), а прямая BC пересекает вторую окружность в точке E ($B \neq E$). Известно, что угол ABC равен углу CAE . Найдите косинус угла BAC . Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.