Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2016 год, вариант 2

1. Сравните числа $\left(\frac{2}{3}\right)^{2016}$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1580}$.

2. Вычислить $\sqrt[3]{\frac{x}{2015+2016}}$, где x — среднее гармоническое чисел

$$a = \frac{2016+2015}{2016^2+2016\cdot 2015+2015^2} \quad \text{и} \quad b = \frac{2016-2015}{2016^2-2016\cdot 2015+2015^2}.$$

Средним гармоническим двух положительных чисел a и b называется число c такое, что $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

3. Изобразите на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислите её площадь: $x^2+y^2+4(x-|y|) \leqslant 0$.

4. На шахматной доске 8×8 расставили 64 шашки с номерами от 1 до 64. 64 ученика по очереди подходят к ней и переворачивают только те шашки, номера которых делятся нацело на порядковый номер очередного ученика. «Дамка» — это шашка, которая перевернута нечетное количество раз. Сколько «дамок» будет на доске, после того как последний ученик отойдет от нее?

5. Решите уравнение

$$\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^{11}+x^{10}+\ldots+x+1\right) = \left(x^7+x^6+\ldots+x+1\right)^2.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение:

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}+x = a?$$

7. Докажите неравенство $\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{4030} \leqslant 2015\sqrt{2016}$.

8. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 75°. На стороне AC выбирается точка K. Около треугольников ABK и CBK описываются окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если наименьшая из возможных длина отрезка O_1O_2 равна 2 см.