Олимпиада САММАТ

11 класс, 2023 год

1. В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?

2. Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?

3. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geqslant 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leqslant 10^{-3}$.

4. Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4.$$

6. Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{118} + \frac{1}{119}.$$

Докажите, что число a делится на 179.

7. Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90} - 10 = 0.$$

8. Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$?

9. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{a^2 + x^2 - 4x - 6a - 23}{\sqrt{a^2 + ax - 2x^2 - 2a - x + 1}} = 0$$

имеет единственное решение.

10. Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.