

Олимпиада САММАТ

8 класс, 2021 год, вариант 2

1. Доказать, что каждое число вида $n^4 + 64$ является составным при всех натуральных $n > 2$.

2. Вычислить $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + (a - x)x + 3 + a - 4a^2 = 0.$$

При каких a это уравнение имеет решение?

3. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2021} < \frac{1}{2}.$$

4. На координатной плоскости рассматриваются параболы вида $f(x) = 2020x^2 + px + q$, для которых значения параметров p и q удовлетворяют условию $p + q = 2021$. Пересекаются ли эти параболы в одной точке координатной плоскости? Ответ объясните.

5. Решите уравнение $x^2 + x^{10} = 2x^{12}$. Ответ обосновать.

6. Миша, Петя и Коля одновременно стартовали в зачете на 150 метров. Когда Миша финишировал, Петя находился в 20 метрах позади него, а когда финишировал Петя — Коля находился позади него в 15 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Миша и Коля, когда Миша финишировал? Предполагается, что скорости мальчиков постоянны и различны.

7. Решите в целых числах уравнение

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 + 8x + 5y = 7.$$

8. На Юпитере 2020 стран, и для любой их четверки хотя бы одна страна из этой четверки враждует с тремя другими. Найти наименьшее возможное количество стран, которые враждуют сразу со всеми.

9. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена биссектриса и высота. Может ли проведенная биссектриса быть больше в два раза проведенной высоты? Ответ объясните.

10. Дядя Ваня решил в своем саду посадить в один ряд 10 деревьев — вишни и яблони. Сможет ли он посадить их так, чтобы между каждыми двумя вишнями оказалось четное число деревьев, а между каждыми двумя яблонями — нечетное число деревьев? Ответ объясните.