

# Олимпиада САММАТ

## 11 класс, 2021 год, вариант 2

1. Доказать, что при всех натуральных  $n$  число  $3^{2n+3} + 40n - 27$  делится на 64.
2. На координатной плоскости рассматриваются параболы вида  $f(x) = 2020ax^2 - 2020ax + 1$ , относительно которых известно, что  $|f(x)| \leq 1$  при  $0 \leq x \leq 1$ . Найдите наибольшее возможное значение параметра  $a$ .
3. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2 \cdot 2021 - 1}{2^{2021}} < 3.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 3^{3x} = 4^y + 3^{3y} - 3, \\ 2^{y+1} + 3^{3y} = 4^x + 3^{3x} - 3. \end{cases}$$

5. Вычислить

$$y = \underbrace{f(f(f(\dots(f(\sin x) \dots)))}_{2021 \text{ раз}},$$

если  $f(\sin x) = \cos x$ .

6. Решите уравнение  $2 \cdot \cos(2 \cdot 2021^x) - 3 \cdot \cos(2021^x) + 1 = 0$ .
7. Числовая последовательность  $x_n$  для всех номеров  $n \geq m \geq 0$  удовлетворяет условию  $x_{n+m} + x_{n-m} = \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2m})$ . Доказать, что при всех  $n \geq m \geq 0$  справедливо равенство  $x_{n+m} \cdot x_{n-m} = (x_n - x_m)^2$ .
8. В треугольник  $ABC$  вписана окружность, которая касается стороны  $AC$  в точке  $P$ . Могут ли оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник  $ABP$ , вторая — в треугольник  $BPC$ , одновременно лежать на окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ ? Ответ объясните.
9. На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания  $R$  лежит шар радиуса  $r$ . В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — меньшего радиуса. Жидкость при этом не вылилась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения  $R/r$  можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром меньшего радиуса?

10. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$