Олимпиада САММАТ

11 класс, 2021 год, вариант 1

1. Число $\overline{abccba}$ состоит из попарно не совпадающих, отличных от нуля цифр a, b, c и делится на 231. Сколько существует таких чисел?

2. Найти точку минимума и наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{x^8-x^6-13x^2+10}{(x^2+1)^2}.$$

3. В треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах AB и AC выбраны точки D и E соответственно так, что $AD:DB=2:1$ и $AE:EC=3:1$. Пусть отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если площадь четырехугольника $ADFE$ равна $S_{ADFE}=7$.

4. Доказать, что число

$$(2020\cdot 2021)^2+\left(2020\cdot 2021\cdot(2020\cdot 2021+1)\right)^2+(2020\cdot 2021+1)^2$$

является квадратом некоторого натурального числа. Решение получить алгебраически, не привлекая вычислительных средств (калькулятора).

5. Решить уравнение $5+\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x$.

6. На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — большего радиуса. Жидкость при этом не выливалась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения R/r можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром большего радиуса?

7. Укажите, при каких значениях параметра a уравнение имеет решение:

$$2\cos^2\left(2^{4x-x^2-4}\right)=5a-\sqrt{3}\sin\left(2^{4x-x^2-3}\right).$$

8. Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. За какое минимальное количество взвешиваний можно на этих весах взвесить 2021 грамм сахара-песка? После каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость. Приведите последовательность взвешиваний.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}|\sin x|+1=\operatorname{tg} y,\\ |\sin y|+1=\operatorname{tg} x.\end{cases}$$

10. На плоскости заданы точки $A(2,4)$, $B(4,2)$ и прямая $y = kx$ $(k > 0)$. Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.