Олимпиада САММАТ

10 класс, 2021 год, вариант 1

1. Решить в натуральных числах уравнение

$$n^4m^2 - k^2 = 2021.$$

2. Решите уравнение:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{35}{12}.$$

3. Приведите пример многочлена с целыми коэффициентами, имеющего корень $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

4. Найти все натуральные числа n, для которых сумма

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \ldots + n!$$

является полным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Ответ обосновать.

5. Вычислить $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, если α, β и γ — углы треугольника.

6. Два квадрата $ABCD$ и $BEFG$ имеют общую сторону $BC = BG$. Квадрат $ABCD$ повернули на некоторый угол относительно общей вершины B как центра окружности так, что продолжение диагонали AC проходит через точку F квадрата $BEFG$. Найти угол AJG, где J — точка пересечения стороны BG неподвижного квадрата $BEFG$ с диагональю AC квадрата $ABCD$ после поворота.

7. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \ldots}}} + x^2 = 2021.$$

8. На плоскости заданы точки $A(2, 4)$, $B(4, 2)$ и прямая $y = kx$ ($k > 0$). Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.

9. Известно, что в разностороннем треугольнике $\triangle ABC$ длины медиан пропорциональны длинам сторон, к которым они проведены. Найти коэффициент пропорциональности.

10. Найдите область значений функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. Привести точные нижнюю и верхнюю границы области.