

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2023/24 год, онлайн-этап, попытка 3

1. Пусть S_k обозначает сумму первых k членов прогрессии. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии при всех натуральных значениях n справедливо соотношение

$$S_{3n} - S_n = 12n^2 + n.$$

Найдите восьмой член прогрессии.

23

2. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором уравнение

$$\sqrt{3 - \frac{a^2}{25}} \sin x + \frac{a}{10} \cos x = \sqrt{2}$$

имеет хотя бы одно решение.

-5

3. В кондитерской продаётся 8 видов пирожных, 8 видов конфет, 8 видов булочек и 8 видов печенья. Сколькими способами можно купить 6 различных десертов в этой кондитерской так, чтобы среди них обязательно было хотя бы по одному пирожному, конфете, булочке и печенью?

415744

4. Сумма двух четырёхзначных чисел, не оканчивающихся на ноль, равна 3997. Вася записывает оба данных числа в обратном порядке (например, если дано 3811, то Вася запишет 1183). Какова наибольшая возможная сумма чисел, записанных Васей?

18982

5. В магазине 5 килограммов моркови стоят столько же, сколько 4 килограмма свёклы и 1 килограмм картофеля. Известно, что если купить по 6 килограммов самого дорогого и самого дешёвого из этих овощей и добавить к этой покупке 2 килограмма моркови и 3 килограмма картофеля, то стоимость этого набора овощей будет равна стоимости 19 килограммов моркови. Определите стоимость килограмма картофеля, если известно, что килограмм самого дорогого из овощей стоит на 10 рублей больше килограмма самого дешёвого.

38

6. Точка K расположена вне окружности Ω с центром O , точка M — внутри Ω , а точка P — на Ω . Отрезок KM пересекает Ω в точке L , а прямая KP касается окружности. Найдите квадрат радиуса окружности, если известно, что $OM = 2$, $LM = 5$, $KL = 9$, $KP = 12$.

14

7. У Пети есть 10 карточек, на каждой из которых написано одно натуральное число. Все числа на карточках попарно различны, а наибольшее из них равно N . Оказалось, что среднее арифметическое чисел на карточках равно 15. Какое наименьшее значение может принимать N ?

02

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ углы ACB , BCD и ACD прямые. На рёбрах CD , AC и BD отмечены точки P , Q и R соответственно, причём

$$\frac{DP}{DC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{DR}{DB} = \frac{1}{2}.$$

Найдите площадь сечения пирамиды $ABCD$ плоскостью PQR , если известно, что $AC = 3$, $BC = 4$, а угол между плоскостью PQR и прямой CD равен $\frac{\pi}{6}$.

2

9. За круглым столом сидят 15 волшебников. У каждого из них по одной волшебной палочке. Волшебники договорились, что некоторые из них будут говорить только правду, а другие — неправду. Каждый из них отдал свою волшебную палочку одному из двух своих соседей. После этого 5 волшебников сказали: «Теперь у меня нет волшебной палочки», а остальные 10 волшебников сказали: «У меня по-прежнему ровно одна волшебная палочка». Какое наибольшее число волшебников могло сказать правду?

11

10. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки P и Q (P лежит между A и Q) такие, что $AP^2 + BQ^2 = PQ^2 = \sqrt{578}$. Найдите наименьшее возможное значение радиуса описанной около треугольника CPQ окружности.

$\sqrt[4]{1445} \approx 3,467$