

## Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, 2023/24 год, онлайн-этап, попытка 2

1. На урок физкультуры пришли 8 учеников. Сколькими способами учитель может расставить их в шеренгу так, чтобы Петя стоял левее Васи, а Вася — левее Толи? Между этими троими ребятами могут стоять и другие ученики.

0229

2. Найдите наименьшее натуральное число такое, что если из него вычесть сумму его цифр, то получится число 12357.

12370

3. Множество  $M$  состоит из всех таких чисел  $t$ , для каждого из которых числа

$$t + \frac{1}{t} \quad \text{и} \quad t^2 - 4t$$

являются целыми. Найдите сумму квадратов элементов множества  $M$ .

91

4. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  такая, что площадь треугольника  $BCD$  равна 4, а площадь треугольника  $ACD$  равна 1. В треугольнике  $ACD$  проведена высота  $DH$ . Найдите площадь четырёхугольника  $BCND$ .

4,8

5. Сколько существует квадратных трехчленов вида

$$x^2 + ax + b$$

с действительными корнями, у которых коэффициенты  $a, b$  — натуральные числа такие, что  $ab = 2^{465}$ ?

018

6. Точки  $E, F, G, H$  — середины сторон  $AB, BC, CD, DA$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  соответственно, а точки  $J, K$  — середины его диагоналей  $BD$  и  $AC$  соответственно. Прямая, проходящая через точку  $J$  параллельно  $AC$ , и прямая, проходящая через точку  $K$  параллельно  $BD$ , пересекаются в точке  $N$ . Найдите площадь четырёхугольника  $AHNE$ , если известно, что  $3S(DGJH) + 5S(EJFB) = 11$  (через  $S(\Phi)$  обозначена площадь фигуры  $\Phi$ ).

1,375

7. У Васи есть пять карточек, на которых написаны цифры 9, 7, 3, 1, 0 (на каждой карточке написана ровно одна цифра). Он составил из них всевозможные пятизначные числа, а потом нашел среднее арифметическое этих чисел. Какой результат он получил? Ответ округлите до целого числа.

54166

8. В каждую клетку доски  $21 \times 13$  клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любых двух соседних по стороне клетках стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

981

9. Пусть для некоторых чисел  $x, y, z$  выполняется равенство

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 1,5.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения  $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$ .

2,25

10. За круглый стол сели 50 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

25