

## Олимпиада «Физтех» по математике

## 11 класс, 2022/23 год, онлайн-этап, попытка 3

1. Известно, что  $\cos \alpha - \sin \beta = \frac{1}{4}$ ,  $\cos 3\alpha + \sin 3\beta = -\frac{11}{16}$ . Найдите наибольшее значение выражения  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta$ .

0,0625

2. Уравнение  $x^3 + 7x^2 - 42x + a = 0$  имеет три различных корня, которые образуют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные значения параметра  $a$ . Если их несколько, в ответ запишите наибольшее из них.

-212

3. Окружность проходит через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  и через его точку пересечения биссектрис  $I$ , причём прямая  $AI$  касается этой окружности. Пусть  $X$  и  $Y$  — точки пересечения сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно с этой окружностью, а  $Z$  есть точка пересечения стороны  $AC$  с прямой  $IY$ . Найдите  $BY$ , если  $XI = 3,5$ ;  $AZ = 5$ .

2,45

4. Про натуральные числа  $n$ ,  $m$ ,  $k$  и  $l$  известно, что  $mn = kl = 350$ . Оказалось, что точки с координатами  $(m, n)$  и  $(k, l)$  различны, а площадь треугольника с вершинами в данных точках и начале координат минимальна. Вычислите эту площадь.

120

5. На декартовой плоскости имеется прямоугольный бильярдный стол с вершинами в точках  $(0; 0)$ ,  $(0; 6)$ ,  $(10; 0)$ ,  $(10; 6)$  и шар в точке  $(2; 3)$ . Шар при ударе по нему попал в нижнюю правую лузу (точка  $(10; 0)$ ), отскочив сначала от верхнего борта, потом от правого, далее от нижнего, потом от левого и, наконец, снова от верхнего. Какое расстояние преодолел шар перед тем, как попасть в лузу? (Считайте, что шар и луза — материальные точки.)

35