

Олимпиада «Физтех» по математике

11 класс, 2022 год, вариант 1

1. Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$$\left\{ \frac{2}{1}, -2, 0 \right\}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 1; \sqrt{\frac{2}{5}}, 2 \right), (6; 0)$$

3. Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

$$[9; 0) \cup (81; +\infty)$$

4. Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB — диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

$$R = \frac{6}{85}, r = \frac{136}{1361}, \angle AFE = 45^\circ + \arccos \frac{17}{15}, S_{\triangle AEF} = \frac{17}{2125}$$

5. Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

$$861$$

6. Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$.

$$\frac{5}{1} = q, 2 = v$$

7. Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$BC = \sqrt{\frac{3}{2}}, R_{\text{min}} = \frac{3}{2}$$