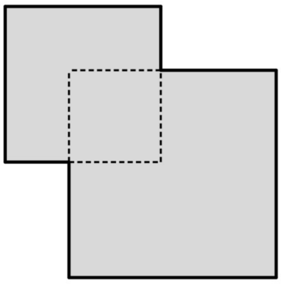
Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

8–9 классы, 2023 год

1. Если сложить произведение и сумму двух чисел, то получится 95. Если вычесть из произведения этих чисел их сумму, то получится 59. Найдите эти числа.

2. Два квадрата, стороны которых относятся как 3 : 4, наложены друг на друга так, что их общая часть также образует квадрат. Длины сторон всех трех квадратов являются натуральными числами, а площадь закрашенной фигуры равна 525. Найдите стороны всех квадратов.



3. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого десятичная запись числа $n!$ оканчивается 500 нулями. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$)

4. На доске написано:

$$*1 * 8 * 64 * 8^3 * 8^4 * 8^5 * 8^6 * 8^7.$$

Боря и Гоша по очереди заменяют звездочки знаками $+$ или $-$ (по одной звездочке за один ход). После восьми ходов вычисляется значение полученного выражения. Докажите, что Гоша может ходить так, что эта сумма будет делиться на 13, если он ходит вторым.

5. Найдите количество пар (m, n) натуральных чисел, таких что каждый из корней уравнения $x^2 - mx - n = 0$ не превосходит 10.

6. У Бори и Гоши есть шахматная доска размером 10×10 и по набору из одинакового числа плиток. У Бори все плитки имеют размеры 1×3, а у Гоши некоторые плитки размеров 1×3, а остальные — 1×4. Ребята выкладывают свои плитки так, чтобы они не выступали за края доски, чтобы края плиток проходили по линиям клеток и чтобы никакие две плитки не касались друг друга (даже углами). Боре удалось выложить все свои плитки указанным способом. Докажите, что, убрав плитки Бори, Гоша тоже сможет уложить свои плитки, не нарушив правила.

7. В школе любые два ребёнка либо дружат друг с другом, либо нет. Назовём ребёнка общительным, если он дружит хотя бы с тремя другими детьми. Известно, что в школе есть n общительных детей, а также ровно 11 детей, у которых всего один друг. При каком наименьшем n заведомо найдётся несколько детей, которых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих своих соседей?

8. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что существуют различные натуральные числа x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n такие, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{118}{2023}.$$