

Олимпиада по математике
«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2023 год, вариант 1

1. Пусть α, β, γ — такие острые углы, что $\sin \alpha = \operatorname{ctg} \beta$, $\sin \beta = \operatorname{ctg} \gamma$, $\sin \gamma = \operatorname{ctg} \alpha$. Вычислите косинусы этих углов.
2. Таблица 4×4 , составленная из 16 чисел, такова, что каждое число равно в ней сумме всех своих соседей по горизонтали и по вертикали. Каким наибольшим может быть количество положительных чисел в таблице?
3. График функции $y = x - a\sqrt{x} + 1$ пересекает ось Ox в двух точках. Через них проведена окружность, касающаяся оси Oy . Найдите ординату точки касания.
4. По дороге из A в B ездят только легковые машины, грузовики и автобусы. Легковые машины выезжают из A в B каждые 2 минуты со скоростью 120 км/ч, грузовики каждые 3 минуты со скоростью 80 км/ч, а автобусы каждые 6 минут со скоростью 60 км/ч. Скорости всех машин постоянны, а расстояние между A и B достаточно большое. Мотоцикл едет из B в A со скоростью 60 км/ч. Какую долю среди встречного транспорта составляют грузовики?
5. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$. На отрезках $AB', AC, AD', B'C, CD', B'D'$ расставляют стрелки и затем находят сумму \vec{S} всех 6 полученных векторов. Сколько различных векторов \vec{S} можно получить, по-разному расставляя стрелки на указанных отрезках?
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle ADC = 145^\circ$, $BC = BD = 1$. Найдите длину стороны AB .
7. Числа x, y, z различны и удовлетворяют системе уравнений

$$x^3 + y^2 + z^2 = x^2 + y^3 + z^2 = x^2 + y^2 + z^3 = 0,9.$$

Какие значения может принимать их произведение?

8. Каким наибольшим может быть количество последовательных десятизначных натуральных чисел, среди которых нет ни одного палиндрома? (Палиндром — это число, одинаково читающееся в обоих направлениях, например, 33, 2552, 70507.)