Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2022 год

1. Докажите, что для любого натурального n существует натуральное число, которое больше своей суммы цифр в $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ раз.

2. Решите уравнение:
$$2021x^3 + 2022x^2 + 2022x + 674 = 0.$$

3. Два прямоугольника $ABCD$ и $AEFG$ имеют общую вершину A и расположены на плоскости так, что точки B, E, D и G лежат на одной прямой (в указанном порядке). Пусть прямые BC и GF пересекаются в точке T, а прямые CD и EF — в точке H. Докажите, что точки A, H и T лежат на одной прямой.

4. Пусть m и n — натуральные числа. Докажите, что число $5^n + 5^m$ можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда число $n - m$ чётное.

5. Две окружности $C_1(O_1)$ и $C_2(O_2)$ с различными радиусами пересекаются в точках A и B. Касательная из точки A к C_1 пересекает касательную из точки B к C_2 в точке M. Докажите, что окружности из точки M видны под одинаковыми углами. (Говорят, что окружность видна из точки вне ее под углом α, если касательные, проведенные из этой точки к окружности, образуют угол α.)

6. Пусть x_k — положительный корень уравнения $x^k - x - 1 = 0$. Докажите, что
$$x_{25} < \frac{x_{20} + x_{30}}{2}.$$

7. В комнате стоят два ящика. В первом лежат n белых и m черных шаров, во втором — достаточно много черных. Из первого ящика наугад вынимают два шара. Если они одного цвета, то черный шар из второго ящика перекладывают в первый, если шары разного цвета, то белый шар возвращают в первый ящик. Так поступают до тех пор, пока в первом ящике не останется один шар. С какой вероятностью он будет белым?

8. Клетки шахматной доски 12×12 раскрашены в 72 цвета так, что в каждый цвет покрашены ровно две клетки. Докажите, что на этой доске можно расставить 12 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и никакие две из них не били друг друга. Две ладьи бьют друг друга, если они стоят в одной горизонтали или в одной вертикали доски.