

**Олимпиада по математике**  
**«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»**

**10 класс, 2021 год**

1. Какую клетку доски размера  $9 \times 9$  можно вырезать так, чтобы оставшуюся часть доски можно было бы замостить прямоугольными плитками размера  $1 \times 5$ ?
2. На финансовом рынке начали работать тридцать мелких банков. Каждый из них может укрупняться, купив любой другой банк. Банк считается крупным, если он сумел купить не менее трех других (мелких или крупных) банков. Считается, что если крупный банк был куплен другим банком, то он по-прежнему остается крупным. Купленный банк повторно не продается. Какое наибольшее количество банков смогут стать крупными?
3. В 1995 году создатель Шнобелевской премии Марк Абрахамс начал выпускать журнал «Анналы невероятных исследований». Этот журнал выходит нерегулярно, но не реже, чем 5 раз за 3 года. Докажите, что если журнал будет издаваться в таком режиме достаточно долго, то когда-нибудь его порядковый номер (выпуски нумеруются подряд, начиная с первого номера) совпадет с годом его выпуска.
4. Двое по очереди бросают симметричную монету (вероятности выпадения орла и решки одинаковы). Тот, у кого первым выпадает орёл, выигрывает партию. Каковы вероятности выигрыша каждого из них?
5. Докажите, что для любых целых чисел  $a$  и  $b$  существуют целые числа  $x$  и  $y$  такие, что  $x^2 + xy + y^2 = 3a^2 + b^2$ .
6. Пусть  $AM$  и  $BN$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle C = 45^\circ$ . На отрезках  $AM$  и  $BN$  отмечены соответственно точки  $K$  и  $T$  так, что  $MK = MB$  и  $NT = NA$ . Докажите, что прямые  $MN$  и  $KT$  параллельны.
7. Решите уравнение
$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}.$$
8. Дана трапеция  $ABCD$ , у которой  $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ . Докажите, что для любой точки  $X$  внутри трапеции справедливо неравенство  $XD - XA - XB \leq CD$ .