

Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

8–9 классы, 2020 год

1. Когда часы показывали 18:00 на фитнес-браслете Вани, количество шагов, пройденных с утра, оказалось равным числу 19791, которое является палиндромом (читается одинаково как слева направо, так и справа налево). Еще через полчаса количество шагов, пройденных Иваном с утра, вновь оказалось палиндромом. Какое наибольшее число шагов на фитнес-браслете мог увидеть Ваня в 18:30, если его средняя скорость за последние полчаса была не более 1 м/с, а его шаг не менее 75 см?

2. На электронных часах Вася увидел время: $\overline{ab} : \overline{cd}$ (если часов меньше 10, то $a = 0$). Оказалось, что $a + bd + c = (a + d)(b + c)$. Верно ли, что Вася точно увидел на часах цифру ноль, если время на часах показывается в 24-часовом формате?

3. Прямоугольник разделили на непересекающиеся квадраты со стороной 1 см. Будем говорить, что квадрат расположен вдоль стороны прямоугольника, если хотя бы одна из сторон квадрата лежит на стороне прямоугольника. Половину квадратов, расположенных вдоль сторон прямоугольника, покрасили в зеленый цвет, а все остальные квадраты оставили незакрашенными. В итоге незакрашенных квадратов оказалось в 4 раза больше, чем зеленых. Найдите все возможные прямоугольники, указав длины их сторон.

4. Пусть для чисел x и y запись $x * y$ обозначает число $xy + 5x - 3y - 12$. Найдите значение выражения

$$0 * (1 * (2 * (3 * (4 * (\dots * (2019 * 2020) \dots))))).$$

5. Даны два положительных целых числа a и b . Могут ли числа $a^2 + 2b$ и $b^2 + 2a$ одновременно быть квадратами целых чисел?

6. За круглым столом разместились 18 человек. Сколькими способами можно выбрать из этих людей троих, чтобы между любыми двумя из выбранных людей находилось бы еще по меньшей мере два человека?

7. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором стороны AB , BC , CD и AD таковы, что $AB \cdot BC = 2AD \cdot DC$. Докажите, что $8BD^2 \leq 9AC^2$.

8. По кругу сидят 10 или 11 человек так, что расстояния между любыми двумя соседями одинаковое. Затем эти люди пересели так, что расстояние по часовой стрелке между любыми двумя людьми изменилось, а расстояние между соседями по-прежнему оказалось одинаковым. Сколько человек сидело по кругу?