

## Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

11 класс, 2019 год

1. Найдите такую пару чисел  $(x, y)$ , при которых выражение

$$x^2 + y^2 + 5 - xy - 2x - 2y$$

принимает наименьшее возможное значение.

2. 1 января 1019 года количество золотых монет у купца Ивана относилось к количеству золотых монет у купца Петра как  $3 : 7$ . Каждый день 1019 года, начиная со 2 января, у одного из них количество золотых монет увеличивалось (у Ивана — ровно на 7 монет, у Петра — ровно на 3 монеты), а у второго оставалось неизменным. Укажите ближайшую дату, когда отношение количества монет у Ивана к количеству монет у Петра снова может стать  $3 : 7$ ?

3. Дана бесконечная последовательность  $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots, (-1)^n n, \dots$ . Между первым и вторым членом вписали одну единицу, между вторым и третьим членом две единицы, между третьим и четвертым членом три единицы и т. д. В итоге получили последовательность  $-1, 1, 2, 1, 1, -3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 1, -5, \dots$ . Найдите сумму первых 2018 членов полученной последовательности.

4. Робот и сотрудники компании участвуют в викторине. Вероятность правильного ответа у робота равна  $4/5$ , а вероятность правильного ответа у сотрудника равна  $2/3$ , если отвечал мужчина, и равна  $3/7$ , если отвечала женщина. Вероятность того, что ответ случайно выбранного сотрудника совпадет с ответом робота равна  $1/2$ . Чему равно отношение количества мужчин в компании к количеству женщин?

5. Пусть  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — единичные вектора в пространстве. Докажите, что

$$\sqrt{1 - \vec{a} \cdot \vec{b}} \leq \sqrt{1 - \vec{b} \cdot \vec{c}} + \sqrt{1 - \vec{a} \cdot \vec{c}}.$$

6. Найдите все четверки натуральных чисел  $(k, l, m, n)$ , которые удовлетворяют равенству  $k! + l! = m! - n!$ .

7. Дана такая числовая последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , что  $x_0 = 8$  и  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$  для всех  $n \geq 0$ . Докажите, что  $64 < x_{2019} < 64,1$ .

8. Диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CD$  выпуклого шестиугольника  $ABCDEF$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что площади треугольников  $AOB$ ,  $COD$  и  $EOF$  равны 4, 6 и 9 соответственно. Какую наименьшую площадь может иметь данный шестиугольник?