

Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

11 класс, 2018 год

1. Дана последовательность чисел x_1, x_2, \dots , такая, что $x_1 = 79$ и $x_n = \frac{n}{x_{n-1}}$ для всех $n > 1$. На сколько нулей оканчивается число равное произведению $x_1 x_2 \dots x_{2018}$?

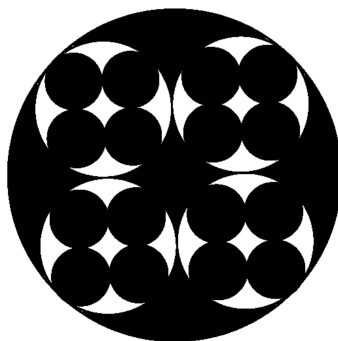
2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = |x| + 2|x - 1| + 3|x - 2| + \dots + 11|x - 10|.$$

3. Сколько различных корней имеет уравнение $f(f(f(x))) = 1$, если $f(x) = x - \frac{2}{x}$?

4. Сотрудники фирмы делятся на трудяг и лентяев. В 2016 году средняя зарплата трудяг превышала в два раза среднюю зарплату лентяев. Повысив свою квалификацию, трудяги в 2017 году стали получать на 50% больше, а зарплата лентяев не изменилась. При этом часть лентяев уволили в конце 2016 года. Средняя зарплата всех сотрудников в 2017 году стала на 20% больше, чем была в 2016 году. Найдите сколько процентов от общего числа сотрудников составляли в 2017 году трудяги, если в 2016 году их было 10%.

5. На первом шаге на листе бумаги была изображена единичная окружность и ограниченный ею круг закрасен черной краской. На каждом из последующих шагов для каждой из окружностей, изображенных на предыдущем шаге, рисуются четыре новые внутренне касающиеся ее окружности равных радиусов. Эти четыре окружности внешне касаются друг друга. Круги, ограниченные новыми окружностями, закрашиваются белой краской, если номер шага четное число, или черной краской, если номер шага нечетен. На рисунке изображен результат трех шагов. Описанный процесс продолжается до бесконечности. Найдите площадь белой области.



6. Действительные числа a и b таковы, что $(a + \sqrt{1 + a^2})(b + \sqrt{1 + b^2}) = 1$. Найдите сумму $a + b$.

7. Назовем положительное число a близким сверху положительному числу b , если a превосходит b , но не больше чем на 1%. Докажите, что если в треугольнике радианная мера одного из углов близка сверху к радианной мере другого угла, то найдутся две стороны этого треугольника такие, что длина одной из них близка сверху к длине другой.

8. В алфавите языка альфов три буквы A , L и Φ . Все слова этого языка можно построить, применяя последовательно следующие правила к любому слову из этого языка:

- (1) поменять порядок букв в слове на противоположный;
- (2) заменить две последовательные буквы так: $LA \rightarrow \Phi\Phi$, $A\Phi \rightarrow LL$, $\Phi L \rightarrow AA$, $LL \rightarrow A\Phi$, $\Phi\Phi \rightarrow LA$ или $AA \rightarrow \Phi L$.

Известно, что $LLA\Phi A L A \Phi \Phi A L A \Phi \Phi \Phi A L L$ — это слово из языка альфов. Есть ли в языке альфов слово $L\Phi A L \Phi A L \Phi A L A \Phi L A \Phi L A \Phi L$?