

Олимпиада по математике
«Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2017 год

1. Сколько существует натуральных чисел n , не превосходящих 2017, таких что квадратный трехчлен $x^2 + x - n$ раскладывается на линейные множители с целочисленными коэффициентами?

2. В тридесятом государстве 29 февраля одного стародавнего года на ярмарке купец продавал сапоги-самоплясы за 2000 алтын. По правилам торговли, цена на товар корректируется каждое утро перед открытием. Цену можно увеличить на 10%, можно уменьшить на 1% или на 12% относительно цены предыдущего дня, а можно вообще не менять. При этом цена должна быть целым числом алтын, округлять ее нельзя. 1 апреля того же года боярин из торговой инспекции обнаружил, что у того же купца те же сапоги-самоплясы стоят 2017 алтын, и составил акт о нарушении правил торговли. Купец в ответ на это заявил, что никаких нарушений он не допускал. Кто из них прав?

3. Числовая последовательность такова, что $x_n = \frac{x_{n-1}}{5} + 4$ для всех $n \geq 2$. Найдите x_{2017} , если $x_1 = 6$.

4. Какое из чисел больше

$$\frac{1}{2016} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2016} \right) \quad \text{или} \quad \frac{1}{2017} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} \right)?$$

5. Для каких положительных целых $n > 2$ существует многоугольник с n вершинами (не обязательно выпуклый) такой, что каждая его сторона параллельна какой-либо другой его стороне?

6. Натуральные числа a, b, c, d и e являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите наименьшее возможное значение числа c , если сумма $b + c + d$ является полным квадратом, а сумма $a + b + c + d + e$ является полным кубом.

7. В конференции принял участие 281 сотрудник из 7 различных филиалов фирмы. В каждой группе из шести участников конференции по меньшей мере двое были одного возраста. Докажите, что среди всех участников можно найти пятерых одного возраста, одного пола и из одного филиала фирмы.

8. Десять пиратов делят между собой золотые и серебряные монеты. Серебряных монет в два раза больше, чем золотых. Они разделили золотые монеты так, что разница между количеством золотых монет у любых двух пиратов не делится на 10. Докажите, что они не смогут разделить серебряные монеты подобным образом.