

Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2023 год

1. Решите уравнение в целых числах

$$3^{x+y} = 6 \cdot 3^x + 3^y.$$

121

2. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;

б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b — целые числа.

8 + 9/10

3. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна. Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.

4. Существуют ли такие функции $f(x, y)$ и $g(x, z)$, что для любых действительных значений x, y, z выполняется равенство

$$f(x, y) - g(x, z) = |y - z|?$$

Ответ обоснуйте.

Таких функций не существует

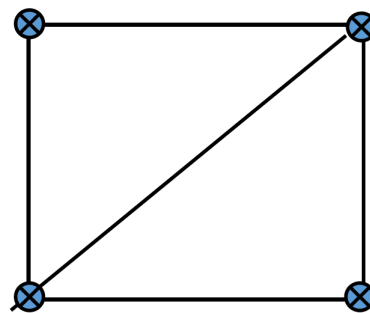
5. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

1923

6. Обозначим $a = 729, b = 241, N = 7169$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a . Найдите разложение числа N на простые множители.

701 · 29 = 6917

7. Компьютеры соединены в сеть, как показано на рисунке. Для этого использовали пять соединительных проводов. Злоумышленник пытается перерезать каждый провод. Вероятность того, что провод будет перерезан равна $\frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что в результате таких действий целостность сети не нарушится, то есть каждый компьютер сможет обмениваться информацией с каждым (возможно и по цепочке с другими компьютерами).



$\frac{91}{6}$

8. В треугольнике ABC угол BAC равен 14° , а угол ACB равен 31° . На стороне AC взята точка P так, что угол ABP — прямой. Пусть AQ — биссектриса треугольника ABC . Найдите угол QPC .

52°