

# Межведомственная олимпиада по математике

## 11 класс, 2022 год

1. Есть 101 клетка. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр от 0 до 9. Если после заполнения всех клеток сумма всех записанных цифр будет делиться на 11, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 11 — то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника? Ответ обосновать.

Правильный игрок

2. Найдите количество цифр в десятичной записи числа  $2^{100}$ , если известно, что десятичная запись числа  $2^{200}$  содержит 61 цифру.

31

3. Сократите дробь

$$\frac{2x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 12x - 14}{4x^6 - 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 25x - 28}$$

В результате сокращения степени многочленов числителя и знаменателя должны уменьшиться.

Например,  $\frac{x^3+2x+2}{2x^3-3x+4}$

4. Решите уравнение

$$8 \cos^5 x - 5 \cos x - 2 \cos 3x = 1.$$

$\mathbb{Z} \ni u, m, n = x$

5. Известно, что положительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 529, \\ x^2 + z^2 + \sqrt{3}xz = 441, \\ z^2 + y^2 = 144. \end{cases}$$

Найдите значение выражения  $\sqrt{3}xy + 2yz + xz$ .

224 $\sqrt{5}$

6. Зафиксируем 10 натуральных чисел  $n_1, n_2, \dots, n_{10}$  и обозначим через  $n$  их сумму

$$n = n_1 + \dots + n_{10}.$$

Предположим теперь, что на доске в строчку записаны  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , каждое из которых равно либо 0, либо 1. Эти числа (в том порядке как они записаны) разбивают на 10 групп:

$$\underbrace{a_1, \dots, a_{n_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{n_1+1}, \dots, a_{n_1+n_2}}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_{n_1+\dots+n_9+1}, \dots, a_n}_{n_{10}}.$$

Группу назовем ненулевой, если в ней содержится хотя бы одна 1. В результате разбиения, в зависимости от того какие числа  $a_1, \dots, a_n$  были взяты изначально, можно получить то или

иное число ненулевых групп. Нас будут интересовать такие наборы  $a_1, \dots, a_n$ , которые при указанном разбиении дают четное число ненулевых групп. Докажите, что число таких наборов  $a_1, \dots, a_n$  (где ненулевых групп будет четно) находится по формуле:

$$2^{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (2^{n_1} - 2) \cdot (2^{n_2} - 2) \cdot \dots \cdot (2^{n_{10}} - 2).$$

7. Обозначим через  $a_{n,m}$  число, полученное записью подряд всех чисел от  $n$  до  $m$  включительно, здесь  $n$  и  $m$  — натуральные числа, причем  $n > m \geq 1$ . Так, например, число  $a_{4,2} = 432$ , а число  $a_{11,7} = 1110987$ . Докажите, что среди таких чисел есть число, делящееся на 2022.

8. Решите уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 6xy,$$

где  $x$  и  $y$  — натуральные числа.

Таких пар нет