

# Межведомственная олимпиада по математике

## 9 класс, 2018 год

1. Сравните числа

$$(10^{2017} + 10^{2016} + \dots + 10 + 1)^{2018} \quad \text{и} \quad (10^{2018} + 10^{2017} + \dots + 10 + 1)^{2017}.$$

Первое число больше второго

2. Найдите все четные натуральные числа  $n$ , у которых число делителей (включая 1 и само  $n$ ) равно  $\frac{n}{2}$ . (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12.)

{2, 4, 6, 8, 12}

3. Сколькими способами из первых  $n$  натуральных чисел  $1, 2, \dots, n$  можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  для ч.н.  $n$

4. Из пункта  $A$  в пункт  $D$ , расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из  $A$  в  $D$  проходит через пункты  $B$  и  $C$ . В пункте  $B$  навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте  $C$  навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из  $B$  в  $C$  он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из  $C$  в  $D$ .

100 км/ч

5. Про натуральные числа  $a, b, c$  известно следующее:

- $a^b$  делится на  $c$ ;
- $b^c$  делится на  $a$ ;
- $c^a$  делится на  $b$ .

Докажите, что  $(a + b + c)^{a+b+c}$  делится на произведение  $abc$ .

6. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  угол  $DAB$  прямой. Известно, что на стороне  $CD$  существует единственная точка  $M$  такая, что угол  $BMA$  прямой. Докажите, что  $BC = CM$  и  $AD = MD$ .

7. Известно, что существует натуральное число  $N$  такое, что

$$\left(\sqrt{3} - 1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}.$$

Найдите  $N$ .

91

8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках  $A, B, C, D$ . Докажите, что сумма длин дуг  $BA + DC$  больше суммы длин дуг  $AD + CB$ .