

Межведомственная олимпиада по математике

9 класс, 2017 год

1. Найдите сумму $0,(0001) + 0,(0002) + \dots + 0,(2017)$.

6666
819302

2. Докажите, что для любого целого числа N уравнение

$$10xy + 17xz + 27yz = N$$

имеет решение в целых числах.

3. Известно, что многочлен

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4$$

имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Найдите многочлен вида

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4,$$

имеющий корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$.

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x+1)^4$$

4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов — А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В — 20% раствор и в С — 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в ёмкости 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

Минимум 1000 переливаний; максимум 73 пробирки вида С

5. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).

5035485

6. В треугольнике со сторонами a, b, c и углами α, β, γ выполнено равенство $3\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Докажите, что $c^2 = a^2 + bc$. Стороны a, b, c лежат соответственно напротив углов α, β, γ .

7. Докажите, что существует натуральное число N , делящееся нацело на 1009, сумма цифр которого равна 1009.

8. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия:

1. прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число;
2. прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число.

(Например, если к первой строке таблицы А прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная на рисунке справа после слова «пример».) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.

Таблица А

1	0
0	2

Таблица В

0	2
3	0

Пример

1	8
0	2

Невозм.