Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2023 год

1. На доске написаны 100 различных натуральных чисел. Петя записал в тетрадку красным цветом все их попарные суммы, а синим цветом — все их попарные произведения. Может ли оказаться так, что для каждого красного числа найдётся делящееся на него синее? (Допускается, что одно и то же синее число может делиться на разные красные числа.)

2. На прямой выбрано несколько отрезков так, что все их концы различны. Докажите, что на этой прямой можно отметить несколько точек так, чтобы на каждом отрезке было отмечено нечётное количество отмеченных точек.

3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с действительными коэффициентами имеют степень 10. Известно, что для любого действительного x верно

$$P(x) \cdot Q(x) \geqslant |P(x)|.$$

Какое наибольшее количество различных корней может быть у многочлена $P(x) \cdot Q(x)$?

4. Дан параллелограмм $ABCD$ такой, что $\angle A = 60°$. Пусть P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что точки A, P, Q, D лежат на одной окружности. Найдите $\angle ADB$.

5. У Пети есть n карточек с n последовательными натуральными числами (на каждой карточке написано ровно одно число). Он выложил эти карточки в ряд в некотором порядке.

У каждых двух чисел на соседних карточках Петя нашёл наибольший общий делитель. При каком наибольшем n все эти наибольшие общие делители могут оказаться различными числами?

6. Таблица 101×101 покрашена в несколько цветов (каждая клетка — ровно в один цвет) так, что в любом квадрате 2×2 присутствуют клетки не более чем трёх различных цветов. Какое наибольшее количество цветов могло быть использовано?