

## Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2023 год

1. Найдите все пары рациональных чисел  $a$  и  $b$  таких, что число  $a + b\sqrt{2}$  является корнем уравнения  $x^2 + bx + a = 0$ .
2. Натуральное число умножили на 3. Могла ли от этого его сумма цифр уменьшиться в 3 раза?
3. Про выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  известно, что  $AB = BC = 13$ ,  $CD = 7$ ,  $AD = 17$ ,  $\angle D = 90^\circ$ . Из вершины  $B$  на сторону  $AD$  опустили высоту  $BH$ . Найдите длину отрезка  $HD$ .
4. В компании 50 детей, некоторые из них дружат (дружба взаимна). Известно, что любую группу из 10 детей можно разбить на 5 пар так, чтобы в каждой паре дети дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей в этой компании.
5. Сумма нескольких (не обязательно различных) действительных чисел из отрезка  $[0, 1]$  не превышает  $S$ . Найдите наибольшее действительное значение  $S$ , при котором эти числа гарантированно можно разделить на две группы, сумма чисел в одной из которых не больше 8, а сумма чисел в другой не больше 4.