

## Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2022 год

1. За круглым столом сидят 60 людей. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый из сидящих за столом произнес фразу: «Среди следующих 3 человек, сидящих справа от меня, не более одного рыцаря». Сколько рыцарей могло сидеть за столом? Укажите все возможные варианты и докажите, что нет других.

2. Дан остроугольный неравносторонний треугольник  $ABC$ , точка  $O$  — центр его описанной окружности. Продолжение высоты  $BH$  треугольника  $ABC$  пересекает его описанную окружность в точке  $N$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $X$  и  $Y$  соответственно такие, что  $OX \parallel AN$  и  $OY \parallel CN$ . Описанная окружность треугольника  $XYZ$  пересекает отрезок  $BH$  в точке  $Z$ . Докажите, что  $XY \parallel OZ$ .

3. Назовем *маленькими* все натуральные числа, не превосходящие 150. Существует ли натуральное число  $N$ , которое не делится на какие-то 2 подряд идущих маленьких числа, но делится на 148 остальных маленьких чисел?

4. Покупатель пришел в антикварный магазин. Торговец выложил на стол 2022 монеты, среди которых есть настоящие и фальшивые, и предупредил покупателя, что настоящих монет среди них больше половины. Для покупателя все монеты внешне неотличимы, а торговец знает, какие именно монеты настоящие, а какие — фальшивые.

За один ход происходит следующее:

- покупатель указывает на любые две монеты,
- торговец говорит, одного ли они типа,
- покупатель убирает одну из этих двух монет со стола.

Может ли покупатель добиться того, чтобы спустя 2021 ход на столе гарантированно осталась настоящая монета?

5. Действительные числа  $x, y, z$  таковы, что  $x+y+z = 2$  и  $xy+yz+zx = 1$ . Найдите наибольшее возможное значение величины  $x - y$ .