

Олимпиада КФУ по математике

11 класс, 2023 год

1. У Маши есть копилка, куда она каждую неделю кладет купюру в 50 или 100 рублей. В конце каждых 4 недель она выбирает из копилки купюру наименьшего достоинства и дарит сестренке. Через год оказалось, что сестренке она отдала 1250 рублей. Какое минимальное количество денег могло накопиться за это время у нее самой?

2.

а) Может ли для некоторых a, b оказаться, что $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 ab$?

б) Может ли для некоторых a, b оказаться, что $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a + b)$?

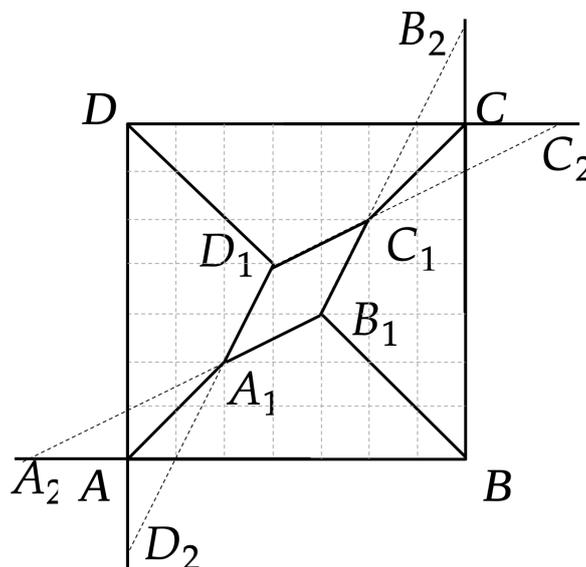
в) Могут ли при каких-то a, b выполняться оба равенства?

3. Обозначим $\min \frac{x-1}{x^2+1} = a$, $\max \frac{x-1}{x^2+1} = b$. Чему равны минимум и максимум функций

а) $\frac{x^3-1}{x^6+1}$;

б) $\frac{x+1}{x^2+1}$?

4. Многогранник $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ изображен в ортогональной проекции на плоскость $ABCD$. Докажите, что такой многогранник невозможен.



5. Рассмотрим алгебраическое выражение $F(a, \dots, x)$, содержащее переменные, скобки и операции умножения и вычитания. Числовые константы не используются. Заменяем один из знаков операции на \perp , другой — на \bowtie . Назовем полученное выражение «формулой». Например, формулой будет выражение $(a \bowtie b) \perp c$, причем один из знаков обозначает разность, а другой — умножение.

- а) существует ли формула, которая при любых значениях переменных (и любом из смыслов знаков) дает значение 0?
- б) существует ли формула, которая при любых значениях переменных дает значение 1?