Олимпиада КФУ по математике

9 класс, 2021 год

1. У Миши есть 32 блока-кирпичика размером $2 \times 3 \times 3$. Сможет ли он уложить их в коробку в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $8 \times 8 \times 9$? Должны быть использованы все кубики, наружу из коробки ничего не должно выдаваться. Обоснуйте свой ответ.

2. Каждый из приведенных квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + ax + c$ имеет два ненулевых целых корня. Один из корней второго трехчлена в 87 раз больше, чем первый корень первого трехчлена, а другой — в 95 раз больше, чем второй корень первого трехчлена. Найдите минимально возможное значение $|b|$. Обоснуйте свой ответ.

3. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD такая, что $AB + CD = AD$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямая, параллельная основаниям трапеции и проходящая через точку O, пересекает боковую сторону AD в точке K. Докажите, что $\angle BKC = 90^\circ$.

4. Вещественные числа x и y таковы, что $x > 2$, $y > 3$. Докажите, что

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}} \geqslant 10.$$