

# Олимпиада Innopolis Open по математике

7 класс, 2023 год

1. Катя хочет покрасить стены своей шестиугольной комнаты в голубой, желтый, зеленый, красный, синий и оранжевый цвета (каждую стену в свой цвет), причем голубая стена должна соседствовать с желтой, а зеленая не должна соседствовать с синей. Сколько существует различных способов покрасить стены комнаты с соблюдением этих правил? Покраски, совпадающие друг с другом при повороте комнаты, считаются одинаковыми.

2. Рассмотрим следующий алгоритм. На каждом шаге мы берем текущее натуральное число, раскладываем его в сумму каких-то двух натуральных слагаемых (эти слагаемые на каждом шаге мы можем выбирать как угодно), а затем перемножаем эти два слагаемых и получаем новое число. Назовем число  $n$  *волшебным*, если, запустив алгоритм с числа, равного сумме цифр десятичной записи  $n$ , мы, в какой-то момент времени можем получить число  $n$ .

*Например, число 35 волшебное, поскольку сумма его цифр равна 8, и алгоритм работает так:*

$$8 = 6 + 2 \longrightarrow 6 \cdot 2 = 12 = 7 + 5 \longrightarrow 7 \cdot 5 = 35.$$

Является ли волшебным число 2023?

3. По кругу расставлены 2024 контейнера, в каждом из которых изначально находится по одному шарик. Робот умеет брать два любых шарика и перекладывать их в соседние с ними контейнеры, но при этом один шарик должен быть переложено в соседний контейнер справа, а другой — в соседний контейнер слева.

*Например, можно взять шарики из контейнеров с порядковыми номерами 134 и 960 и переложить из них шарики в контейнеры с номерами 135 и 959 соответственно.*

Можно ли написать для робота такую программу, что в результате ее работы

1. останется 8 контейнеров, в каждом из которых по 253 шарика;
2. останется 253 контейнера, в каждом из которых по 8 шариков?

4. Аналитик приехал на конференцию. Там он узнал, что среди 190 других участников конференции 50 всегда говорят правду, 100 всегда лгут, а 40 могут говорить что угодно. Все, кроме аналитика, знают всё про всех остальных: кто всегда говорит правду, кто всегда лжёт, а кто может говорить что угодно.

Докажите, что пообщавшись со всеми участниками конференции, аналитик гарантированно сможет выяснить, кто кем является.

5. Андрей загадал натуральное число  $k$ , а Виктор каким-то образом выписал на доску все натуральные числа, не содержащие в десятичной записи цифру 0. Затем Андрей огласил значение  $k$ , и Виктор вместо каждого записанного на доске числа  $n$  записал разность между суммой цифр числа  $n$  и суммой цифр числа  $kn$  (и там, и там говорится о сумме цифр десятичной записи числа).

Докажите, что теперь на доске записано бесконечно много нулей.