

Олимпиада Innopolis Open по математике

8–9 классы, 2022 год

1. В городе 50 киберспортивных клубов и N киберспортсменов, причем каждый киберспортсмен посещает 1 или 2 клуба. В каждом клубе не более 55 участников, и для любых двух клубов найдется киберспортсмен, который посещает оба. Найдите все возможные значения N .

2. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC . Точка K выбирается на отрезке AB так, что $\angle BCK = \angle ACM$. Точки P и Q на сторонах BC и AC таковы, что $KP \parallel AC$ и $KQ \parallel BC$. Докажите, что четырехугольник $BPQA$ — вписанный.

3. Найдите все функции $f(x)$, которые при любых $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ удовлетворяют равенству

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

4. Султан поймал двоих математиков и сказал им: «Завтра в каждом из четырех углов этого зала я поставлю по сундуку, на каждом из которых будет написано какое-то целое число, и в первый из вас будет тому свидетелем. На его глазах в один из этих сундуков я положу ключ от вашей тюрьмы, и первый из вас должен будет увеличивать на единицу число, написанное на одном из сундуков по его выбору.

Затем я уведу этого человека и, не двигая сундуки, приведу второго, и он должен будет с первой попытки угадать, в каком сундуке ключ. Если угадает — вы оба свободны, если же он не справится — значит, оба останетесь в моей тюрьме навсегда. А пока идите в свою камеру и думайте, можете ли спастись.»

Как должны действовать математики, чтобы гарантированно спастись? Учтите, что завтра у них не будет возможности переговариваться друг с другом.

5. Параболы, заданные уравнениями $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$, пересекаются в четырех различных точках $P_i(x_i, y_i)$ где $i = 1, 2, 3, 4$. Вычислите значение выражения

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4).$$