

Олимпиада Innopolis Open по математике

7 класс, 2022 год

1. В зале собрались горожане, каждый из которых — либо честный, либо жулик, либо хитрец, и все друг про друга знают, кто есть кто. Каждый из честных написал на листе количество честных (включая себя), каждый жулик написал суммарное количество хитрецов и жуликов (включая себя), а каждый хитрец написал количество жуликов.

Затем в зал вошел секретарь, не знающий никого из присутствующих, и собрал все листы. В каком случае секретарь **не сможет** по написанным числам восстановить количество честных людей в зале?

2. Дан правильный 100-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны). Докажите, что если соединить его вершины замкнутой ломаной так, чтобы в каждую вершину входило бы ровно два звена ломаной, то в этой ломаной найдутся два параллельных звена.

3. На планете Рамануджан монетами служат титановые кубики. Длина ребра монеты-кубика — $1, 2, \dots, 8$ в местных единицах измерения, а номинал равен ее весу. Вес самой маленькой монеты — 1 *джан*. Для удобства счёта стоимость в 9 джанов называется *раману*.

Вы купили товар стоимостью в целое число раману, заплатили 3 монеты и получили сдачу — несколько (меньше 8) джанов. Если ни одна из монет не была лишней (т.е. любых двух из трех не хватило бы), то какое количество джанов сдачи вы **не смогли бы** получить? Какова минимальная стоимость товара, если вы получили сдачу в 1 джан?

4. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ и правильный треугольник APQ не имеют общих внутренних точек. Известно, что $PB < QB$, и точка M — середина отрезка PB . Найдите угол между прямыми AM и QF .

5. Математик стоит на земле перед лестницей с n ступеньками. Когда математик поднимается, он может перешагнуть ровно через a ступенек (считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение), а когда спускается — ровно через b ступенек (аналогично, считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение).

Математик хочет с уровня земли («нулевая ступенька») подняться на самую верхнюю ступеньку и спуститься обратно на землю. Докажите, что наименьшее n , при котором это возможно, равно $a + b - (a, b)$. Здесь (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b .