Олимпиада Innopolis Open по математике

10–11 классы, 2022 год

1. Все марсиане делятся на одноглазых, двуглазых и трехглазых. Марсианин отдыхает только тогда, когда закрыт хотя бы один его глаз, причем каждую секунду каждый глаз может быть открыт с вероятностью 0,5 независимо от остальных.

Известно, что среди всех марсиан, у которых не меньше двух глаз, каждую секунду в среднем 80% отдыхают, а среди тех, у которых не больше двух глаз, каждую секунду отдыхают в среднем 2/3 марсиан. Найдите двуглазых марсиан среди всех марсиан.

2. Проводится шахматный турнир, в котором участвуют n человек ($n > 2$). Из-за эпидемической обстановки партии проходят в отдельных помещениях, причем в каждом помещении шахматист может играть только фигурами одного цвета.

Например, если Иван играл черными фигурами в помещении №1, то он уже не сможет сыграть белыми фигурами в этом помещении. Аналогично, если участник играл белыми фигурами в помещении №5, то в этом же помещении он уже не сможет играть черными фигурами. При этом он может снова играть белыми фигурами в помещении №5.

Известно, что каждый участник турнира должен сыграть с любым другим участником ровно одну партию. Организаторы хотят составить такое расписание, чтобы задействовать минимально возможное число помещений. Докажите, что это число равно $[\log_2 n]$.

Здесь $[x]$ *— целая часть числа* x*, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее* x*.*

3. Два игрока играют в игру: они по очереди вытаскивают камни из кучки, в которой изначально было n камней. В свой первый ход первый игрок берет из кучи один или несколько камней, но не может забрать все камни. Каждым следующим ходом очередной игрок должен забрать из кучи количество камней, являющееся делителем числа камней, забранного противником на предыдущем ходу, и не превосходящее числа камней в куче. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Для каждого $n > 1$ определите, у кого из соперников есть выигрышная стратегия.

4. Назовем бесконечную числовую последовательность $\{a_n\}$ *стабилизирующейся*, если при некотором k_0 для всех $k \geqslant k_0$ выполнено $a_k = a_{k+1}$. Тогда k_0 назовем *временем стабилизации*, a_k (при $k \geqslant k_0$) — *стабильным значением*.

Пусть a, b — натуральные числа. Дана последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = x_2 = x_3 = a$ и для любого натурального n выполнены равенства $x_{3n+1} = b \cdot x_{3n-2}$, $x_{3n+2} = x_{3n-1} \circ b$ (здесь $\circ b$ — операция взятия целой части при делении на b), $x_{3n+3} = x_{3n} + x_{3n-2} \cdot (x_{3n-1} (\mod b))$ (здесь $(\mod b)$ — операция взятия остатка от деления на b).

Какие из последовательностей $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$, $\{x_{3n}\}$ ($n \in \mathbb{N}$) стабилизируются, и чему равны их стабильные значения? Чему равно время стабилизации последовательности $\{x_{3n}\}$?

5. Олег и Оливер гоняют на велосипедах с одинаковыми угловыми скоростями: Оливер — по круговой траектории $\mathscr{A}$, а Олег — по круговой траектории $\mathscr{T}$ в два раза меньшего радиуса, причем они стартуют с двух ближайших точек окружностей и круг Олега лежит внутри круга Оливера. По окружности $\mathscr{T}$ также движутся два помощника, поддерживающих экран (т. е. хорду с концами в точках, в которых расположены помощники) так, что расстояние от каждого из них до Олега всегда такое же, как и расстояние от Олега до Оливера. Докажите, что на протяжении всей гонки экран касается некоторой фиксированной окружности.