

Олимпиада Innopolis Open по математике

11 класс, 2021 год

1. Решите уравнение

$$\log_{25}(x - 500) - \log_x 25 = 1.$$

2. Дан треугольник ABC . Существует единственный набор таких трёх окружностей ω_A , ω_B и ω_C , которые лежат внутри треугольника, попарно друг друга касаются, а также каждая из них касается сторон соответствующего угла: ω_A касается сторон AB и AC , ω_B касается сторон BA и BC , ω_C касается сторон CA и CB . Обозначим точку касания окружностей ω_A и ω_B как T_{AB} . Аналогично определяются точки T_{AC} и T_{BC} . Дизайнер хочет сконструировать люстру-витраж из цветного стекла, в которой стороны треугольника ABC — это прочный (пренебрежимо) лёгкий контур, в который вписан массивный плоский диск весом 1 кг, а также добавлены уравновешивающие веса в вершинах A , B и C треугольника так, чтобы точка подвеса люстры находилась на пересечении отрезков AT_{BC} , BT_{AC} и CT_{AB} (остальные детали люстры имеют пренебрежимо малый вес).

Докажите, что такой проект люстры осуществим и определите уравновешивающие веса в вершинах (то есть такие, чтобы люстра висела горизонтально, закреплённая только в точке подвеса), если радиусы окружностей ω — это r_A , r_B , r_C , а радиус вписанного диска треугольника равен r .

3. Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2×1 . Если две доминошки образуют квадрат 2×2 , разрешается повернуть их обе на 90° (сделать флип). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (кирпичная кладка) за как можно меньшее количество операций. Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратов стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.

Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через T . Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину v_0 прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину v соединим с v_0 путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходит либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Назовем кирпичной кладкой разбиение T_{\min} , в котором все доминошки горизонтальны. Назовем приведенной высотой разбиения T величину $h_T(v) = |H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|/4$. Назовем рангом замощения T число $r(T) = \sum h_T(v)$. Докажите, что любое замощение T можно превратить в кирпичную кладку за $r(T)$ флипов, причем за меньшее количество флипов это сделать невозможно.

4. Дана система уравнений, описывающая положение и ориентацию исполнительного механизма робота на плоскости вида

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi_1 + b \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + c \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \\ y = a \sin \varphi_1 + b \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + c \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \\ \gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \end{cases}$$

Найдите конфигурацию $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ для заданного положения и ориентации (x, y, γ) , а также известных a, b, c . При каких a, b, c задача имеет решение?