

## Олимпиада Innopolis Open по математике

9 класс, 2020 год

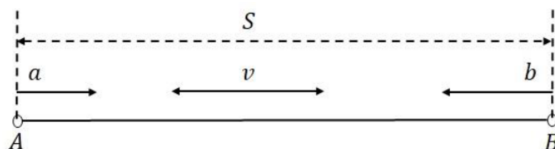
1. Решите уравнение  $2^x = x^2$  в целых числах.
2. Найдите и докажите явное выражение (в терминах известных операций на целых числах) для общего члена последовательности, заданной следующим рекуррентным отношением:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ , и,  $a_{n+2} = (n + 1)(a_n + a_{n+1})$  для  $n \geq 0$ .
3. Есть 13 внешне одинаковых монет, среди которых одна — фальшивая, а все остальные — настоящие. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая — другой вес, отличный от настоящих монет. Можно ли взвешивая монеты на чашечных весах (без числовых делений) за три взвешивания найти фальшивую монету и одновременно определить ее вес относительно настоящих монет (то есть определить, легче она или тяжелее настоящих)?
4. Нынешний год — високосный, то есть 29 февраля 2020 г. (29.02.20) — реальная календарная дата. Вычислим следующие величины:
  - $S_1 = 51$  — сумма трёх чисел 2, 29 и 20;
  - $S_2 = 1245$  — сумма квадратов этих чисел;
  - $S_3 = 32397$  — сумма кубов этих же чисел.

Найдите все (вещественные) корни уравнения

$$x^3 + S_1 x^2 + \frac{S_1^2 - S_2}{2} x + \frac{S_1^3 + 2S_3 - 3S_1 S_2}{6} = 0.$$

5. Во время собеседования при приеме на работу в разных IT-компаниях любят задавать разные тестовые нестандартные задачи для проверки творческих способностей кандидата на работу. Одна из таких популярных тестовых задач следующая.

Точки  $A$  и  $B$  (см. рис.) движутся на встречу друг-другу (обычно говорят о двух «путниках») со скоростями  $a$  и  $b$  соответственно, а между ними все время «летает» со скоростью  $v$  ( $v > a$  и  $v > b$ ) еще одна точка (обычно говорят о «мухе», которая летает с носа одного путника на нос другого путника без задержек на носу ни одного из путников). Начальное расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $S$ .



Вопрос: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Так вот, в этой задаче вам сначала надо ответить на вопрос, сформулированный в тестовой задаче: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Далее, вам надо ответить на следующий вопрос (и доказать ответ!): конечное или бесконечное число полетов между точкам-путниками совершит точка-муха от момента начала движения до момента встречи точек-путников?

И, наконец, вам надо ответить на еще один вопрос. Пусть в начальный момент точка-муха находилась в точке  $A$ ,

- $R_1$  — расстояние, которое разделяло  $A$  и  $B$ , когда точка-муха в первый раз полетела от  $A$  до  $B$ , а  $R_2$  — расстояние, которое разделяло  $B$  и  $A$ , когда точка-муха в первый раз полетела от  $B$  до  $A$ ,
- ...
- $R_{2k-1}$  — расстояние, которое разделяло  $A$  и  $B$ , когда точка-муха в  $k$ -ый раз полетела от  $A$  до  $B$ , а  $R_{2k}$  — расстояние, которое разделяло  $B$  и  $A$ , когда точка-муха в  $k$ -ый раз полетела от  $B$  до  $A$ ,
- ...

Так вот, в качестве ответа на третий вопрос вам надо привести (и обосновать) формулы для  $R_{2k-1}$  и  $R_{2k}$  (для  $k \geq 1$ ).

**6.** Окружность — это, как известно, множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки (центра) на фиксированное расстояние (радиус окружности), а число  $\pi$  — это отношение длины окружности к длине ее диаметра. В этом определении по умолчанию предполагают, что речь идет об Евклидовом расстоянии/длине, которая вычисляется на двумерной координатной плоскости ( $XOY$ ) для отрезка с концами в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  по формуле  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

Однако, Евклидово определение длины — не единственно возможное. Например, манхэттенская длина отрезка с концами в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  вычисляется по формуле

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

(Название «манхэттенское расстояние» связано с уличной планировкой Манхэттена, представляющую собой прямоугольную сетку улиц: «На север с юга идут авеню, на запад с востока — стриты» В. В. Маяковский, «Бродвей».)

Нарисуйте на координатной плоскости ( $XOY$ ) манхэттенскую окружность манхэттенского радиуса 1 с центром в начале координат. Чему равно отношение манхэттенской длины манхэттенской окружности к манхэттенской длине ее диаметра?