

## Олимпиада Innopolis Open по математике

11 класс, 2020 год

1. Рассмотрим уравнение  $y^x = x^y$  на множестве положительных действительных чисел. Вам требуется явно указать для каждого вещественного значения  $x > 0$  число таких различных вещественных чисел  $y > 0$  что  $y^x = x^y$ . (Пример явного описания: для  $x = 1$  существует единственное число  $y > 0$  такое, что  $y^x = x^y$ ).

2. Найдите и докажите явное выражение (в терминах известных операций на целых числах) для функции  $g(m, n)$ , вычисляющей пару чисел  $(p, q)$ , и определенной следующим образом для любых целых значений  $m \in [0 \dots 100]$  и любых целых значений  $n \geq 0$ :

$$g(m, n) = (m, n + 1), \text{ если } m = 100, \text{ иначе } (p - 1, q), \text{ где } (p, q) = g(g(m + 1, n)).$$

$$g(m, n) = \begin{cases} (m, n + 1), & \text{если } m = 100; \\ (p - 1, q), & \text{иначе} \end{cases}$$

Где  $(p, q) = g(g(m + 1, n))$ .

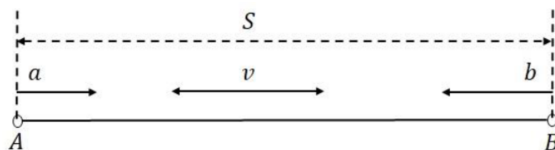
3. Найдите максимальное целое число  $n \geq 0$ , для которого верно следующее утверждение: «Существует способ найти (определить) единственную фальшивую монету среди  $n$  внешне одинаковых монет, взвешивая монеты на чашечных весах (без числовых делений) не более трех раз и одновременно определить ее относительный вес (то есть легче она или тяжелее настоящих)».

(Замечание: предполагается, что все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая — другой вес, отличный от веса настоящих монет).

4. Нынешний год — високосный, то есть 29 февраля 2020 г. (29.02.20) — реальная календарная дата. Сколько (вещественных) корней (и какой кратности) имеет уравнение

$$x^3 + 29x^2 + 2x + 20 = 0.$$

5. Во время собеседования при приеме на работу в разных IT-компаниях любят задавать разные тестовые нестандартные задачи для проверки творческих способностей кандидата на работу. Одна из таких популярных тестовых задач следующая (см. рис.).



Точки  $A$  и  $B$  двигаются на встречу друг-другу (обычно говорят о двух «путниках») со скоростями  $a$  и  $b$  соответственно, а между ними все время «летает» со скоростью  $v$  ( $v > a$  и  $v > b$ ) еще одна точка (обычно говорят о «мухе», которая летает с носа одного путника на нос другого путника без задержек на носу ни одного из путников). Начальное расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $S$ , Вопрос: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Так вот, в этой задаче вам сначала надо ответить на вопрос, сформулированный в тестовой задаче: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Далее, вам надо ответить на следующий вопрос (и доказать ответ!): конечное или бесконечное число полетов между точкам-путниками совершит точка- муха от момента начала движения до момента встречи точек-путников?

И, наконец, вам надо ответить на еще один вопрос. Пусть в начальный момент точка-муха находилась в точке  $A$ . Какое суммарное расстояние пролетит точка-муха, когда движется от  $A$  до  $B$ ? А какое суммарное расстояние пролетит точка-муха, когда движется от  $B$  до  $A$ ?

6. Окружность — это, как известно, множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки (центра) на фиксированное расстояние (радиус окружности), а число  $\pi$  — это отношение длины окружности к длине ее диаметра. В этом определении по умолчанию предполагают, что речь идет об Евклидовом расстоянии/длине, которая вычисляется на двумерной координатной плоскости ( $XOY$ ) для отрезка с концами в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  по формуле  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ .

Однако, Евклидово определение длины — не единственно-возможное. Например, манхэттенская длина отрезка с концами в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  вычисляется по формуле

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

(Название «манхэттенское расстояние» связано с уличной планировкой Манхэттена, представляющую собой прямоугольную сетку улиц: «На север с юга идут авеню, на запад с востока — стриты» В. В. Маяковский, «Бродвей».)

Чему равно отношение манхэттенской длины Евклидовой окружности к манхэттенской длине ее диаметра?